BAZI İNTEGRAL KURALLARI

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
3. $\int e^x\,dx = e^x + c$
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
7. $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$
8. $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
12. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$
13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

Kısmi İntegral Metodu

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du}$$

ÖRNEKLER:

1. $\int x^2 e^{2x}\,dx = ?$

$x = u \Rightarrow dx = du$

$\int e^{2x}\,dx = \int dv \Rightarrow \frac{1}{2}e^{2x} = v$

$\int x^2 e^{2x}\,dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$

$$\boxed{= \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c}$$

2. $\int x^2 e^{-x}\,dx = ?$

$x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$

$\int e^{-x}\,dx = \int dv \Rightarrow -e^{-x} = v$

$= -x^2e^{-x} + 2\int e^{-x}x\,dx$

$x = u \Rightarrow dx = du$

$e^{-x}dx = dv \Rightarrow -e^{-x} = v$

$= -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right)$

$$\boxed{= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c}$$

... / ... / ...

③ $\int x\sin x\,dx = ?$

$x = u \Rightarrow dx = du$

$\sin x\,dx = dv \Rightarrow -\cos x = v$

$= -x\cdot\cos x + \int \cos x\,dx$

$\boxed{= -x\cdot\cos x + \sin x + C}$

④ $\int e^x\cos x\,dx = ? = I$

$e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$

$\cos x\,dx = dv \Rightarrow \sin x = v$

$= e^x\cdot\sin x - \int e^x \sin x\,dx$

$e^x = u \Rightarrow e^x dx = du$

$\sin x\,dx = dv \Rightarrow -\cos x = v$

$= e^x \sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx$

$2\int e^x\cos x\,dx = e^x(\sin x + \cos x)$

$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$

DİFFERANSİYEL DENKLEMLER

x, y, z, t ... bağımsız değişkenler

u, v, w ... bağımlı değişkenler

bağımlı değişkenler ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevleri arasındaki her fonksiyonel bağıntı differansiyeli gösterir.

① $\frac{dy}{dx} - xy = 0 \Rightarrow y = y(x)$

② $\frac{d^2u}{dt^2} - t\frac{du}{dt} = ut \Rightarrow u = u(t)$

③ $\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 - ty = 0 \Rightarrow y = y(t)$

④ $F(x, y, y') = 0 \Rightarrow y = y(x)$

(①–④) Adi veya elementer differansiyel denklemler.

⑤ $\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$ Kısmi türevli differansiyel denklemler.

Mertebe: Bir dif. denklemin mertebesi denklem içinde bulunan en yüksek mertebeden türevle ifade edilir.

Derece: Bir dif. denklemin derecesi denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin derecesi ile ifade edilir.

Adi dif. denklemler hep 2 boyutlu uzayda söz konusu olacaktır.

$f(x,y,c)=0$, $y=y(x,c)$, $y=f(x,y)$

↳ keyfi sabit parametre $c \in \mathbb{R}$

→ bir parametredeki eğri ailesi (2 boyutta)

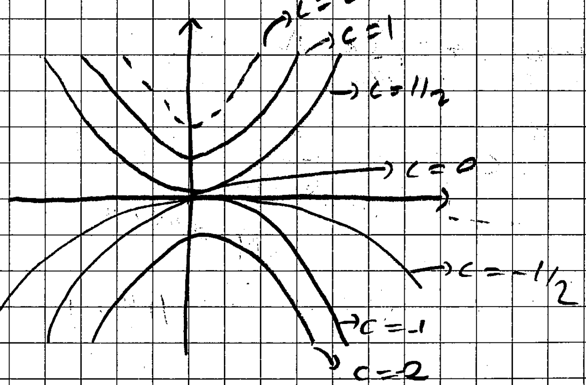
$f(x,y,c)=0$ ①

$$\frac{\partial f(x,y,c)}{dx}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f(x,y,c)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad ②$$

②. denklem c'yi içermiyorsa bu bir parametreli eğri ailesinin dif. denklemi olur.

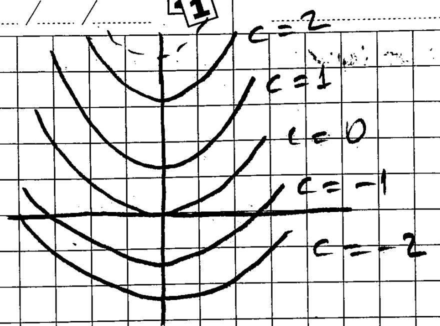
②. denklem c'yi içeriyorsa ①-② arasında c yok edilerek elde edilen denklem söz konusu eğri ailesinin dif. denklemlerini ifade eder.

Ör: $y=cx^2$



$y=cx^2$

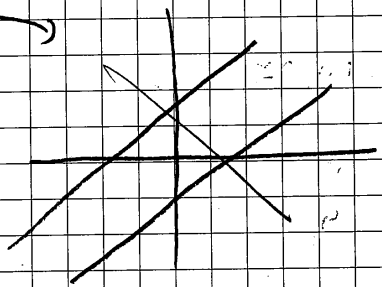
$y'=2cx \Rightarrow c=\dfrac{y'}{2x} \Rightarrow y=\dfrac{x^2}{2x}\cdot y' \Rightarrow y=\dfrac{x}{2}\cdot y'$



$y = x^2 + c \implies \boxed{y' = 2x}$

c yok oldu

$y = cx + c^2$



$y' = c$

$$\boxed{y = y'x + (y')^2}$$

$$u = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

$$\frac{du}{dt} = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -4c_1 \cos 2t - 4c_2 \sin 2t$$

$$= -4\underbrace{(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)}_{u}$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + 4u = 0}$$

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \overset{\text{genel çözüm} \quad \text{dif. denklem}}{\Longleftrightarrow} F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

↳ n parametreli bir eğri ailesi

↳ Burada c'lere değerler verilerek elde edilen çözümlerin her birine dif. denklemlerin özel çözümleri denir. (Dif. denklemi sağlarlar)

Bazen genel çözüm ailesi içinde bulunmayan, yani c'lere değerler verilerek elde edilemeyen öyle çözümler bulunabilir ki bu fonksiyonlar (çözümler) dif. denklemi sağlar. Bu tür çözümlere aykırı çözümler denir.

* Mertebe ile parametre ilişkilidir. Parametre ne kadarsa, mertebe o kadardır.

$y = cx + c^2$ için dif denklem $y' = x \cdot y' + (y')^2$

genel çözüm

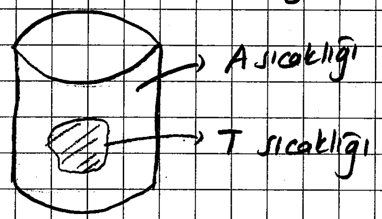
ör: $y = \dfrac{-x^2}{4}$ dif. denklemi sağlar mı?

$y' = -\dfrac{x}{2} \Rightarrow y = x \cdot y' + (y')^2$ için

$$-\frac{x^2}{4} \stackrel{?}{=} x \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{4}$$

$$-\frac{x^2}{4} \stackrel{?}{=} -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{4} \text{ bir aykırı çözüm}$$

Newton'un Soğurma Kanunu

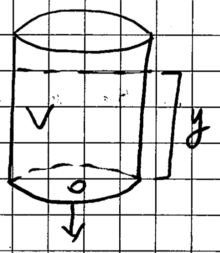


Bir cismin $T(t)$ sıcaklığının değişiminin zaman değişimine oranı T ve cismi çevreleyen ortamın A sıcaklığı arasındaki farkla orantılıdır. Yani $\boxed{\dfrac{dT}{dt} = -k(T-A)}$ k: orantı katsayısı

Eğer $T > A$ ise $\dfrac{dT}{dt} < 0$ olur. Böylece sıcaklık t'nin azalan bir fonksiyonudur. Bu durumda cisim soğur.

Eğer $T < A$ ise $\dfrac{dT}{dt} > 0$ olur. T artandır.

Toricelli Kanunu



Boşalan bir tanktaki suyun V hacminin değişiminin (zamana göre), zamana oranının tanktaki suyun y derinliğinin karekökü ile orantılıdır.

$\boxed{\dfrac{dv}{dt} = -k\sqrt{y}\ ,}$ k: orantı katsayısı

Eğer tank taban alanı A olan bir dik silindir ise $V = A \cdot y$ ve böylece

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = A \frac{dy}{dt}$ olur. Bu durumda $h = \frac{k}{A}$ bir sabit olmak üzere;

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{A}\underbrace{\left(\frac{dV}{dt}\right)}_{-k\sqrt{y}} \\ h = \frac{k}{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -h\sqrt{y}$$

Ör: Sabit doğum ve ölüm oranlarına sahip bir $P(t)$ nüfusunun değişiminin zamana oranı bir çok basit halde nüfusun büyüklüğü ile orantılıdır. Yani; k orantı katsayısı olmak üzere; $\boxed{\frac{dP}{dt} = k \cdot P}$

Hız-Kuvvet

Bir parçacığın bir doğru boyunca hareketi (x-ekseni) onun t zamanındaki x koordinatını veren ($x = f(t)$ olmak üzere) konum fonksiyonu ile tanımlanır. Parçacığın hızı $V = f'(t) = \frac{dx}{dt}$ olarak kullanılır.

Bunun $a(t)$ ivmesi $a(t) = v'(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$

Newton kanunu $F = ma = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ şeklinde olur.

Sabit İvme

F kuvvetinin ve dolayısıyla $a = \frac{F}{m}$ ivmesinin sabit olduğunu varsayalım. Bu takdirde;

$\frac{dv}{dt} = a$, a sabit denklemi ile başlar ve her iki tarafın integrali alınır.

$$dV = a \cdot dt \Rightarrow \int dV = \int a \cdot dt$$

$v(t) = a \cdot t + C_1$, $t = 0$ iken $v(0) = V_0$ olduğunu biliyoruz.

$V_0 = a \cdot 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = V_0 \Rightarrow v(t) = a \cdot t + V_0$ olur.

İkinci bir adımda $v(t) = \frac{dx}{dt} = a.t + v_0 \Rightarrow dx(t) = (at + v_0)dt$

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0.t + c_2$$

$t=0$ için $x(0) = x_0$ alarak;

$$x(0) = x_0 = a.0 + v_0.0 + c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0.t + x_0$$

$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = y'$ şeklindeki birinci mertebeden denklemlere, bu tür denklemlerde $y = y(x) \to y(x_0) = y_0$ bir başlangıç şartıdır.

$y(x_0) = y_0$ da $x_0 = 0$ olsada olmasada başlangıç şartıdır.

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad , y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

Başlangıç değer problemi çözmek demek x_0'ı içeren bir aralıkta (1)'deki her iki şartı sağlayan türetilebilir bir $y = y(x)$ fonksiyonunu bulmak demektir.

Eğim Alanları

(1) $\frac{dy}{dx} = y' = f(x,y)$ denklemini ele alalım. (1)'in iki yanının x'e göre integralini alalım. Bu durumda;

$dy = f(x,y)\,dx$ olan

$y = \underbrace{\int f(x,y)}\,dx + c_1$ elde ederiz

?? sıkıntı (iki değişkene karşılık sadece dx) $\Rightarrow$ çözülemez.

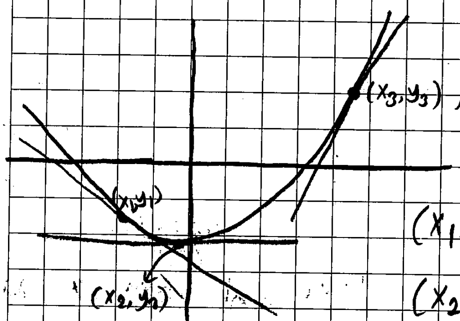
Verilen $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ denkleminin çözümlerini şekillendirebilmek için basit bir geometrik yorum yaparız.

x-y düzlemindeki her (x,y) noktasındaki $f(x,y)$ değeri bir $y' = m = f(x,y)$ eğimini belirtir ($\tan\theta = m = f'$) Differansiyel denklemin bir çözümü başka $y = y(x)$

grafiği, geçtiği her bir $(x, y(x))$ noktasında teğetin söz konusu eğime sahip olan, yani $y'(x) = f(x, y(x))$ dan türetilebilir bir fonksiyondur.

Böylece $y' = f(x,y)$ dif. denkleminin bir çözüm eğrisi, denklemin bir çözümünün grafiği her bir (x,y) noktasındaki teğetinin, eğimi $m = f(x,y) = y'$ olan xy-düzleminde bir eğridir.

$y' = x - y$ dif. denklemi için şu şekil pekiştirir.



(x_1, y_1), $m_1 = x_1 - y_1$

(x_2, y_2), $m_2 = x_2 - y_2$

Bu geometrik bakış $y' = f(x,y)$ diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için bir grafik yöntem belirler.

Düzlemde temsilci bir (x,y) nokta topluluğunun her bir noktasından özel $m = y' = f(x,y)$ eğimine sahip bir doğru çizelim. Bu şekildeki tüm doğru parçaları $y' = f(x,y)$ denkleminin eğim alanını oluşturur.

I. MERTEBEDEN (I. DERECEDEN) DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Değişkenlerine Ayrılabilen Dif. Denklemler

$y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ şeklinde ise bu tür denklemlere değişkenlerine ayrılabilen denir.

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx$$ (iki tarafın integrali alınır)

$$\underbrace{\int \frac{dy}{f_2(y)}}_{F_2(y)} = \underbrace{\int f_1(x)\,dx}_{F_1(x)} + C \Rightarrow \boxed{F_2(y) = F_1(x) + C} \text{ veya } \boxed{F_2(y) + C = F_1(x)}$$

C sabiti her iki taraftan birine ilave edilebilir.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör: $\frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{4-y^2} \cdot \sqrt{1-x}$

$$\frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \sqrt{1-x} \cdot dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \int \sqrt{1-x}\, dx + c \qquad 1-x = t \Rightarrow dx = -dt$$

$$\Rightarrow \arcsin\frac{y}{2} = -\int \sqrt{t}\, dt + c$$

$$= -\int t^{1/2} dt + c$$

$$= -\frac{2}{3} t^{3/2} + c$$

$$\boxed{\arcsin\frac{y}{2} = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + c}$$

g.ç.

Ör: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2x}}{y \cdot e^{-y}}$ denkleminin $x_0 = 0$ için $y(x_0) = 2$ şartı altındaki çözümünü bulalım.

$$y \cdot e^{-y} dy = e^{-2x} dx \Rightarrow \int y e^{-y} dy = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c$$

$$\left.\begin{aligned} u &= y \\ dv &= e^{-y} dy \end{aligned}\right\} \begin{aligned} du &= dy \\ v &= -e^{-y} \end{aligned}$$

$$-y \cdot e^{-y} + \int e^{-y} dy = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c$$

$$\boxed{-y \cdot e^{-y} - e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c}$$ $x = 0$ için $y(0) = 2$ olan çözüm ise

$$-2e^{-2} - e^{-2} = -\frac{1}{2} e^{0} + c$$

$$-6e^{-2} = -1 + 2c \Rightarrow \boxed{c = \frac{1 - 6e^{-2}}{2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow -ye^{-y} - e^{-y} = -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} - 3e^{-2}}$$

g.ç.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör: $y' = -6xy$

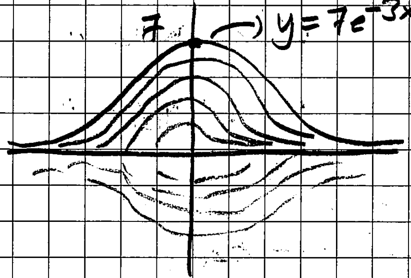
$$\frac{dy}{dx} = -6xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -6x\,dx \Rightarrow \ln y = -3x^2 + c_1$$

$$y = e^{c_1} \cdot e^{-3x^2} \Rightarrow \left\{ y = c \cdot e^{-3x^2} \right\} \text{g.ç.}$$

$x=0$ için $y(0)=7$ şartı altında çözüm bulalım:

$$y(0) = 7 = c \cdot e^0 = 7 \Rightarrow \boxed{c=7}$$

$$\left\{ y = 7e^{-3x^2} \right\}$$



ALIŞTIRMALAR 1

1. $x(y^2-1)dx - y(x^2-1)dy = 0$
2. $x^2y\,dy - dx = x^2dx$
3. $(x^2-x)y' = y^2+y$
4. $xy' + y^2 = 1$
5. $(1+y)y' = x^2(1-y)$
6. $2xy(x+1)y' = y^2+1$
7. $y' + (1-y^2)\tan x = 0$
8. $x(1-x^2)dy = (x^2-x+1)y\,dx$
9. $(1+y)y' = xy$

HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bir $f(x,y)$ ifadesi $\left.\begin{matrix} x \to tx \\ y \to ty \end{matrix}\right\}$ için $f(x,y) = f(tx,ty)$

$$= t^m f(x,y) \;,\; m \in \mathbb{N}$$

oluyorsa bu durumda $f(x,y)$'ye t'nin kuvveti olan m doğal sayısı için m'inci dereceden homojen denir.

Öe: $f(x,y) = x^2+y^2+xy$

$f(tx,ty) = (tx)^2+(ty)^2+(tx\cdot ty)$

$= t^2(x^2+y^2+xy)$

$= t^2 f(x,y) \Rightarrow$ homojen 2. dereceden

Öe: $g(x,y) = x^2y+x^3$

$g(tx,ty) = (tx)^2ty+(tx)^3$

$= t^3(x^2y+x^3)$

$= t^3 g(x,y) \Rightarrow$ 3. dereceden homojen

Öe: $h(x,y) = x-y+1$

$h(tx,ty) = tx-ty+1$

$= t^?(---)$??? $\Rightarrow$ homojen değil

$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ veya $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ veya

$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = y'$

Burada P ve Q x ve y'ye göre aynı dereceden homojen ise denkleme o dereceden homojen denir. Bu durumda denklemi çözmek için P ve Q denklemin homojenlik derecesindeki x ile bölünür.

$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ denklem böyle gösterilir. $\frac{y}{x} = u = u(x)$ bağımlı değişken dönüşümünü yaparız.

$y = u\cdot x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot x+u \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x+u = F(u)$

$\frac{du}{dx}\cdot x = F(u)-u \Rightarrow \frac{du}{F(u)-u} = \frac{dx}{x}$

...../...../..... 1

$$\underbrace{\int \frac{du}{F(u)-u}}_{f(u)} = \underbrace{\int \frac{dx}{x}}_{\ln|x|} + C \Rightarrow f(u) = \ln|x| + C$$

$$\boxed{f\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C} \quad g.ç.$$

Ör: $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{1+y/x}{1-y/x}$$

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u$$

$$\frac{du}{dx} x + u = \frac{1+u}{1-u} - u \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \int \frac{du\,(1-u)}{1+u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du\,(1-u)}{1+u^2} = \ln|x| + C$$

$$\left\{ \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \right\}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u\,du}{1+u^2} = \ln|x| + C$$

$$\arctan u - \frac{1}{2} \ln(u^2+1) = \ln|x| + C \Rightarrow \boxed{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = \ln|x| + C} \quad g.ç.$$

Ör: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-y^2}{xy} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{y/x} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = u \Rightarrow y = u \cdot x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{x} \cdot x + u$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{1-u^2}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1-2u^2}{u} \Rightarrow \int \frac{du \cdot u}{1-2u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \ln|1-2u^2| = \ln|x| + C \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{4} \ln\left|1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| = \ln|x| + C} \quad g.ç.$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör: $x\cdot y' = y + x\cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ denklem homogen midir?

$$\Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right) \qquad y = u\cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot x + u$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x + \cancel{u} = \cancel{u} + \sin u$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{\sin u} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{\sin u} = \ln|x| + c$$

$$\tan\frac{x}{2} = t \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan\frac{u}{2} = t \Rightarrow \int\frac{\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{2t}{\cancel{1+t^2}}} = \ln|x| + c \Rightarrow \int\frac{dt}{t} = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \ln|t| = \ln|x| + c \Rightarrow \ln\left|\tan u/2\right| = \ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln\left|\tan\left(\frac{y}{2x}\right)\right| = \ln|x| + c} \text{ g.ç.}$$

Ör: $x\cdot y' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$, $y(2) = 1$ değerini bulalım.

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow y = x\cdot u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\cdot x + u$$

$$\frac{du}{dx}\cdot x + u = u + \sqrt{1-u^2} \Rightarrow \int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \arcsin u = \ln|x| + c$$

$$\boxed{\arcsin y/x = \ln|x| + c} \text{ g.ç}$$

$y(2) = 1$ için $\arcsin 1/2 = \ln 2 + c \Rightarrow \pi/6 = \ln 2 + c$

$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6} - \ln 2 \Rightarrow$ çözüm

$$\arcsin y/x = \ln x + \frac{\pi}{6} - \ln 2$$

Ör: 3) $y' = \frac{y}{x} - \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$, $y = u \cdot x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = u - u \cdot \ln u$$

$$-\frac{du}{u \cdot \ln u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int \frac{du}{u \ln u} = \ln|x| + c$$

$\ln u = t$

$\frac{du}{u} = dt$

$$\Rightarrow \int \frac{dt}{t} = \ln|x| + c \quad = \ln|\ln u| = \ln|x| + c$$

$$\boxed{= \ln\left|\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right| = \ln|x| + c}$$

g.s.

ALIŞTIRMALAR (2)

1) $y' = \frac{y}{x+y}$

2) $(x+y)dx + x \cdot dy = 0$

3) $x \cdot y' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$

4) $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

5) $(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 3y^2)dy = 0$

6) $(2x - y)dy - (2y - x)dx = 0$

7) $xy' = y + x \cdot \cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

8) $xy' = y - x \tan(y/x)$

9) $xy' = y + 2\sqrt{y^2 - x^2}$

TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$U(x,y) = c$ böyle bir eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulmak için

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dx}_{P(x,y)} + \underbrace{\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \cdot dy}_{Q(x,y)} = 0 \Rightarrow du(x,y) = c$$

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0=du(x,y)$

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ şeklindeki bir denklemin tam olabilmesi için gerek ve yeter şart $\boxed{P_y=Q_x}$ olmalıdır.

Ör: $(\underbrace{x^2+y}_{P})dx+(\underbrace{y+x}_{Q})dy=0$

$P_y=1=Q_x=1 \quad \} \; P_y=Q_x \Rightarrow$ Tam diferansiyel

Ör: $(\underbrace{x^2+y}_{P})dx-(\underbrace{y+x}_{Q})dy=0$

$(x^2+y)dx+(-y-x)dy=0$

$P_y=1\neq Q_x=-1 \quad \}$ tam değil

Çözüm: $\boxed{P\,dx+Q\,dy=0 \text{ tam olsun}}$

1-) $u=\underbrace{\int^x P\,dx}_{M(x,y)}+h(y)$, veya 2-) $\int^y Q\,dy+k(x)$

$\downarrow$

$u(x,y)=M(x,y)+h(y)$

$u_y(x,y)=\underbrace{M_y(x,y)+h'(y)}=Q$

$\hookrightarrow$ --- $h'(y)=$ sadece y'ye bağlı bir durum

$h(y)=$ bulunur

Çözüm olarak; $\boxed{u(x,y)=M(x,y)+\text{bulunan } h(y)=C}$ g.ç.

Ör: $(x^2+y)dx+(x+y)dy=0$

$u=\int(x^2+y)dx+h(y)$

$u=\frac{x^3}{3}+yx+h(y)$

$u_y=\cancel{x}+h'(y)=\cancel{x}+y=Q$

$h'(y)=y \Rightarrow h(y)=\frac{y^2}{2}$

$\boxed{u(x,y)=\frac{x^3}{3}+yx+\frac{y^2}{2}=C}$ g.ç.

...../...../...... 1

veya $U=\int (x+y)\,dy + k(x)$

$U = xy + y^2/2 + k(x)$

$U_x = \cancel{y} + k'(x) = x^2 + \cancel{y} = P$

$k(x) = x^3/3 \Rightarrow \boxed{u(x,y) = xy + \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = c}$ g.c

$\boxed{Pdx + Qdy = 0}$ (tam)

(2-) $U = \underbrace{\int^{y} Q\,dy}_{N} + k(x)$ $\quad\boxed{U = N(x,y) + \text{bulunan } k(x) = C}$ g.c.

$U = N + k(x)$

$\rightarrow U_x = \underline{N_x + k'(x) = P}$

└ gerekli sadeleştirmeler yapılacak

$k'(x) = - - - -$ sadece x'e bağlı olmalı

$\Rightarrow k(x) =$ bulunur.

Ör: $(x+y)\,dx + (x - e^{2y})\,dy = 0$ (tam)

$U = \int^{y} (x - e^{2y})\,dy + k(x)$

$U = xy - \frac{1}{2}e^{2y} + k(x), \quad U_x = y + k'(x) = x + y = P$

$k(x) = \frac{x^2}{2}$

$\boxed{U = xy - 1/2\, e^{2y} + \frac{x^2}{2}}$ g.c.

ALIŞTIRMALAR (3)

1. $(y - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy = 0$
2. $(x^2 + 2xy - y^2)\,dx = (-x^2 + 2xy + y^2)\,dy$
3. $(2xy + e^{x})\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$

4) $(y+3x)dx+x\,dy=0$

5) $(7x-3y+2)dx+(4y-3x-5)dy=0$

6) $y\cdot e^{x}dx+e^{x}dy=0$

7) $(5xy^4+x)dx+(2+3y^2+10x^2y^3)dy=0$

8) $(\tan x+2y)dx-(ye^{2y}-2x)dy=0$

$\boxed{P\,dx+Q\,dy=0 \text{ (tam olmasın)}}$

Bu durumda denklemi x ve y'ye bağlı öyle ifadelerle çarpmalıyız ki denklem tam yapılabilir.

Nasıl Tam Yaparız?

1-) Sadece $\lambda=\lambda(x)$ şeklinde çarpan arayalım

eğer $\dfrac{P_y-Q_x}{Q}=f(x)$ şeklinde sadece x'e bağlı ise bu durumda $\boxed{\lambda=e^{\int f(x)dx}}$ elde edilir.

Ör: $(\underbrace{1-xy}_{P})dx+(\underbrace{xy-x^2}_{Q})dy=0$

$$P_y=-x\neq Q_x=y-2x \quad \text{(tam değil)}$$

$$\frac{P_y-Q_x}{Q}=\frac{-x-y+2x}{xy-x^2}=\frac{x-y}{-x(x-y)}=-\frac{1}{x}=f(x)$$

$$\boxed{a^{k\cdot\log_a f(x)}=(f(x))^k}$$

$$\lambda=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln|x|}=1/x$$

$$\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x}-y}_{P}\Big)dx+\Big(\underbrace{y-x}_{Q}\Big)dy=0$$

$$P_y=-1=Q_x \quad \text{(tam)}$$

$$U=\int(y-x)dy+k(x) \Rightarrow U=\frac{y^2}{2}-xy+k(x)$$

$$\Rightarrow U_x=-y+k'(x)=\frac{1}{x}-y=P \quad \Rightarrow \quad \boxed{U=\frac{y^2}{2}-xy+\ln x=c}$$

$$k(x)=\ln x$$

g.a.

Ör: $y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0$

$\underbrace{(y+\ln x)}_{P}dx - \underbrace{x}_{Q}dy = 0$

$P_y = 1 \neq Q_x = -1$ (tam değil)

$\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{1+1}{-x} = -\dfrac{2}{x} \Rightarrow \lambda = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = \dfrac{1}{x^2}$

$\underbrace{\left(\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2}\right)}_{P}dx - \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{Q}dy = 0$

$P_y = \dfrac{1}{x^2} = Q_x = \dfrac{1}{x^2}$ (tam)

$U = \int \dfrac{dy}{x} + k(x) \Rightarrow U = \dfrac{y}{x} + k(x) \Rightarrow U_x = \cancel{\dfrac{y}{x^2}} + k'(x) = \cancel{\dfrac{y}{x^2}} + \dfrac{\ln x}{x^2}$

$k'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

$dk = \dfrac{\ln x}{x^2}dx$

$k = \int \dfrac{\ln x}{x^2}dx$

$k = \dfrac{\ln x}{x} + \int \dfrac{dx}{x^2}$

$k = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$

$\boxed{U = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} = c}$

g.ç.

Ör: $\underbrace{(2y-3x)}_{P}dx + \underbrace{x}_{Q}dy = 0$ (tam değil)

$\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = \dfrac{2-1}{x} = \dfrac{1}{x}$

$\lambda = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

$\underbrace{(2yx - 3x^2)}_{P}dx + \underbrace{x^2}_{Q}dy = 0$

$P_y = 2x = Q_x = 2x$ (tam)

$U = \int x^2 dy + k(x)$

$U = x^2y + k(x)$

$U_x = \cancel{2xy} + k'(x) = \cancel{2xy} - 3x^2$

$k(x) = -x^3$

$\boxed{U = x^2y - x^3 = c}$

g.ç.

2-) $\lambda = \lambda(y)$ böyle bir ifade arayalım denklemi tam yapacak

eğer $\frac{P_y - Q_x}{-P} = g(y)$ varsa $\lambda = e^{\int g(y)dy}$ böylelikle denklem tam olur.

Ör: $x^2y\,dx + (x^3+2y^3)dy = 0$ (tam değil)

$$\frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{x^2 - 3x^2}{-x^2y} = \frac{2}{y} = g(y)$$

$$\lambda = e^{2\int \frac{dy}{y}} = e^{2\ln y} = y^2$$

$$\underbrace{x^2y^3}_{P}dx + (\underbrace{x^3y^2 + 2y^5}_{Q})\,dy = 0$$

$$P_y = 3x^2y^2 = Q_x = 3x^2y^2 \text{ (tam)}$$

$$U = \int x^2y^3dx + h(y)$$

$$U = \frac{x^3y^3}{3} + h(y) \Rightarrow U_y = \cancel{x^3y^2} + h'(y) = \cancel{x^3y^2} + 2y^5$$

$$h(y) = \frac{y^6}{3}$$

$$\boxed{U = \frac{x^3y^3}{3} + \frac{y^6}{3} = c} \text{ g.c.}$$

ALIŞTIRMALAR (4)

1. $xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$
2. $(x^2+y^2+x)dx + xy\,dy = 0$
3. $y^2dx + x(xdy - ydx) = 0$
4. $(xy^3+1)dx + (xy^2dy) = 0$?
5. $dy = x^2y\,dx + x^3dy$
6. $y - xy' + \ln x = 0$
7. $(x^2y + y^2)dx - x^3dy = 0$
8. $(2x+y)dx - (x-2y)dy = 0$
9. $2y\,dx + (1 - \ln y - 2x)dy = 0$
10. $(y - yx^2)dx + (3x - x^2y)dy = 0$
11. $x^2dy - (x^2 - 3xy)dx = 0$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$

$\hookrightarrow A(x)y' + B(x)y = -C(x)$

$\hookrightarrow y' + \frac{B(x)}{A(x)} y = \frac{-C(x)}{A(x)}$

$\hookrightarrow \boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ bu durum için

$\boxed{\lambda = e^{\int p(x)dx} \text{ için} \quad \lambda y = \int \lambda q(x)dx + C}$ g.ç.

ÖR: $-xy' + y + \ln x = 0$

$y' - \frac{1}{x} y = \frac{\ln x}{x}$

$\lambda = e^{-\int dx/x} = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} y = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} dx + C$

$= \int \frac{\ln x}{x^2} dx + C$

$\boxed{\frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C}$ veya $\boxed{y = -\ln|x| + Cx - 1}$

g.ç.

ÖR: $y' + \frac{2}{x} y = \frac{\cos x}{x}$

$xy' + 2y = \cos x$

$\lambda = e^{2\int \frac{1}{x} \cdot dx} = x^2$

$x^2 y = \int x^2 \cdot \frac{\cos x}{x} dx + C$

$x^2 y = \int x \cos x dx + C$, $u = x \Rightarrow dx = du$

$\cos x dx = dv \Rightarrow v = \sin x$

$x^2 y = x \cdot \sin x - \int \sin x dx + C$

$\boxed{x^2 y = x \cdot \sin x + \cos x + C}$ g.ç.

Ör: $(x^2+1)y' + 2xy = \dfrac{\arctan x}{x^2+1}$

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}\,y = \frac{\arctan x}{(x^2+1)^2}$$

$$\lambda = e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2+1$$

$$(x^2+1)y = \int (x^2+1)\cdot \frac{\arctan x}{(x^2+1)^2}\,dx + c$$

$$(x^2+1)y = \int \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx + c \quad , \quad \arctan x = t$$

$$\frac{dx}{x^2+1} = dt$$

$$= \int t\,dt + c$$

$$\boxed{(x^2+1)y = \frac{(\arctan x)^2}{2} + c}$$ g.ç.

ALIŞTIRMALAR (5)

1) $y' - \frac{1}{x}y = x^3$

2) $xy' - 4y = x^5$

3) $xy' + y = \sqrt{x}$

4) $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$

5) $xy' - y = x^3 + 1$

6) $(1-x^2)y' - y = 1 - x^2$

7) $x^2y' + y = 2x$

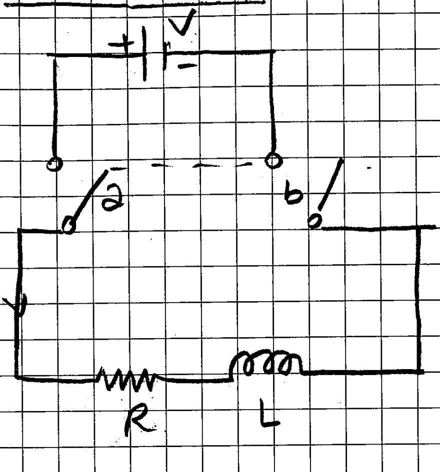
8) $(x^2-1)y' - xy = x^2$

9) $(1+x^2)y' + 2xy = \tan x$

10) $xy' + 2y = \sin x$

11) $xy' + 2y = e^x$

RL Devreleri



Şekildeki diyagram toplam direnci R-ohm olan ve bir sarım olarak gösterilen öz indüktansıda L-henri olan bir elektrik devresi ifade etmektedir. a ve b uçları sabit V-voltluk bir elektrik kaynağını birleştirecek şekilde kapatılabilen bir anahtar vardır. Böylece bir devre için $V = I \cdot R$ ohm kanununu gözelim. Böylece söz konusu edilen

$L\dfrac{di}{dt} + R \cdot i = V$ ① denklemi söz konusudur.

$$A(x)y' + B(x)y = C$$

$$\underbrace{Ay' + By = C}_{\text{lineer}}$$

Ör: 3

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}$$

$$\lambda = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

$$x \cdot y = \int \frac{\cos x}{x^2} \cdot x \, dx + c$$

$$xy = \int \frac{\cos x}{x} dx + c$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\downarrow$$

$$xy = \int \left(\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots}{x} \right) dx + c$$

$$\downarrow$$

$$xy = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2!}\int x\,dx + \frac{1}{4!}\int x^3 dx + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\int x^{2n-1} dx + \cdots + c$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{xy = \ln x - \frac{1}{2!}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n} + \cdots + c}$$

Ör: 3

$$\frac{dw}{dt} + w\tan t = \cos^2 t \,, \quad w\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\lambda = e^{\int \tan t\, dt} = e^{-\ln|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}$$

$$\frac{w}{\cos t} = \int \frac{1}{\cancel{\cos t}} \cdot \cancel{\cos^2 t}^{\cos t}\, dt + c$$

$$\frac{w}{\cos t} = \sin t + c \Rightarrow w(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + c\cdot\cos t$$

$w\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ için

$$\Rightarrow w\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} + c\cdot \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{c\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{w(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t} \quad \text{g.ç.}$$

Ör: 3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$$

işler diyler çarpımı sonucu

$$\frac{dx}{dy} = x+y \Rightarrow \underbrace{\frac{dx}{dy} - x = y}_{\text{lineer}} \Rightarrow \lambda = e^{-\int dy} = e^{-y}$$

$$\Rightarrow e^{-y}\cdot x = \int y\cdot e^{-y}\, dy + c$$

$$e^{-y}\cdot x = -ye^{-y} - e^{-y} + c$$

$$\boxed{x = -y + 1 + ce^{y}} \quad \text{g.ç.}$$

$y = u \Rightarrow du = dy$

$\int e^{-y}dy = \int dv$

$-e^{-y} = v$

$-ye^{-y} + \int e^{-y}dy$

$\underbrace{-ye^{-y} - e^{-y} + c}$

ALIŞTIRMALAR (6)

1-) $y' - 3y = 3e^{2x}$, $y(0) = 0$

2-) $y' + 3y = 2xe^{-3x}$,

3-) $xy' - 3y = x^3$, $y(1) = 10$

4-) $xy' + 2y = 3x$, $y(1) = 5$

5-) $xy' + 5y = 7x^2$, $y(2) = 5$

6-) $y' + y = e^x$, $y(0) = 1$

7-) $(x^2+1)y' + 2xy = 1$, $y(0) = 1$

8-) $\cos y \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}\sin y = 1$ $\qquad \sin y = u \Rightarrow$ $u' = \cos y$, $\cos y \dfrac{dy}{dx} = du$

$u' + \dfrac{1}{x} u = 1$

9-) $y' + y = \sin x$, $y(0) = 0$

Bernouilli Diferansiyel Denklemi

Genel şekli şöyledir;

$$A(x)y' + B(x)y + C(x)y^n = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{Q}$$

$$y' + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}y^n = 0$$

$$y' + \underbrace{\frac{B}{A}}_{p(x)}y = \underbrace{-\frac{C}{A}}_{q(x)}y^n$$

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^n}$$

$n = 0$ ise lineer
$p(x) = 0$, $q(x) = 0$, $n = 1$ ise değişkenlere ayrılan

Çözüm için

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{y}{y^n} = q(x)$$

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right) = q(x) \quad , \quad \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n} = u(x)$$

iki taraftan x'e göre türev alırız.

$(1-n)\, y^{1-n-1} \cdot y' = u'$

$(1-n)\,\dfrac{y'}{y^n} = u'$

$\dfrac{y'}{y^n} = \dfrac{u'}{(1-n)} \Rightarrow \dfrac{u'}{1-n} + P(x)\, u = q(x)$

$\Rightarrow \underbrace{u' + (1-n)\, P(x) \cdot u = (1-n)\, q(x)}_{\text{lineer}}$

Ör: 3 $xy' + y = y^2 \ln x$

$x\dfrac{y'}{y^2} + \dfrac{1}{y} = \ln x$

$\dfrac{1}{y} = u \longrightarrow u' = -\dfrac{y'}{y^2} \Rightarrow \dfrac{y'}{y^2} = -u'$

$-xu' + u = \ln x \Rightarrow \underbrace{u' - \dfrac{u}{x} = \dfrac{\ln x}{x}}_{\text{lineer}}$

$\Rightarrow \lambda = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1}{x} \cdot u = -\int \ln x \dfrac{dx}{x^2} \longrightarrow \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{x^2} \end{array} \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{u}{x} = -\left(-\dfrac{\ln x}{x} + \int \dfrac{dx}{x^2}\right) + c$

$\dfrac{u}{x} = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} + c$

$u = \ln x + 1 + cx$

$\dfrac{1}{y}$ $\boxed{y = \dfrac{1}{\ln x + 1 + cx}}$ g.ç.

Ör; $xy - y' = e^{-x^2} y^3$

$$-\frac{y'}{y^3} + x\frac{1}{y^2} = e^{-x^2}$$

$$u \Rightarrow u' = -\frac{2y'}{y^3} \rightarrow -\frac{y'}{y^3} = \frac{u'}{2}$$

$$\frac{u'}{2} + x \cdot u = e^{-x^2}$$

$$\underbrace{u' + 2xu = 2e^{-x^2}}_{\text{lineer}}$$

$$\lambda = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

$$e^{x^2} \cdot u = \frac{e^{x^2}}{y^2} = 2\int e^{x^2} \cdot e^{-x^2} dx + c \Rightarrow \frac{e^{x^2}}{y^2} = x + c$$

$$\boxed{y^2 = \frac{e^{x^2}}{c + x}} \text{ g.ç.}$$

Ör! $y' + 2y = 2xy^{3/2}$

$$(y^{-1/2})' = -\frac{1}{2} y^{-3/2} \cdot y'$$

$$\frac{y'}{y^{3/2}} + 2 \cdot \frac{1}{y^{1/2}} = 2x$$

$$u \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}\frac{y'}{y^{3/2}} \Rightarrow \frac{y'}{y^{3/2}} = -2u'$$

$$-2u' + 2u = 2x$$

$$-u' + u = x \Rightarrow \underbrace{u' - u = -x}_{\text{lineer}} \Rightarrow \lambda = e^{\int -dx} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow e^{-x} \cdot u = e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = -\int x \cdot e^{-x} dx + c$$

$$= -\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + c$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{y}} = x + 1 + c \cdot e^{x}} \text{ g.ç.}$$

AlIŞTIRMALAR (7)

1-) $xy - y' = y^3 e^{-x^2}$, $y(0) = 1$

2-) $y + 2y' = y^3(x-1)$

3-) $x^3 y' = 2x^2 y + y^3$

4-) $xy' + y = xy^3$

5-) $3xy' - 2y = xy^4$

6-) $y' \cos x + y \cdot \sin x + y^3 = 0$

7-) $2xy' - y = 10x^3 y^5$

8-) $xy' - y = \sqrt{y} \cdot x^2$

Değişken Dönüşümü Yardımıyla Denklem Çözümü

Bazen bir diferansiyel denklemin hangi tipte olduğunu açıkça belirleyemeyebiliriz. Böyle durumda denklem içindeki öyle yerlere öyle bir yeni değişken diyebiliriz ki denklem yeniden düzenlendiğinde bildiğimiz tiplerden birine dönüşebilir. O denklemde çözeriz.

Ör: $y' = \dfrac{1}{x+y}$

$dx - (x+y)\,dy = 0$

$x + y = u(x) = u$

$1 + y' = u' \Rightarrow y' = u' - 1$

$\Rightarrow u' - 1 = \dfrac{1}{u}$

$u' = \dfrac{1}{u} + 1 = \dfrac{u+1}{u} = \dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{u \cdot du}{u+1} = dx$

$\displaystyle\int \frac{u\,du}{u+1} = x + C$

$u \mid u+1$; 1 ; $\underline{u+1}$; -1

$\displaystyle\int du - \int \frac{du}{u+1} = x + C$

$u - \ln|u+1| = x + c$

$$\boxed{x+y-\ln|x+y+1| = x+c}$$ g.a.

Öe: $(3y^2 - x)y' = y$

$(3y^2 - x)\dfrac{dy}{dx} = y$

$y \cdot dx = (3y^2 - x)dy$

$\dfrac{dx}{dy} = 3y - \dfrac{x}{y}$

$\underbrace{\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{x}{y} = 3y}_{\text{lineer}}$

Öe: $(xy+1)dx + 2x^2(2xy-1)dy = 0 \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+1}{2x^2(1-2xy)}$

$xy = u$

$y + xy' = u' \rightarrow y' = \dfrac{u'-y}{x}$

$\Rightarrow \dfrac{u'-y}{x} = \dfrac{u+1}{2x^2(1-2u)} \Rightarrow u' - y = \dfrac{u+1}{2x(1-2u)}$

$\Rightarrow u' = \dfrac{u+1}{2x(1-2u)} + y$

$\Rightarrow u' = \dfrac{u+1}{2x(1-2u)} + \dfrac{u}{x} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{u+1+2u-4u^2}{2x(1-2u)}$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{-4u^2+3u+1}{2x(1-2u)}$

$\Rightarrow \dfrac{2u-1}{4u^2-3u-1}du = \dfrac{dx}{2x}$

$\displaystyle\int \frac{2u-1}{4u^2-3u-1}du = \frac{1}{2}\ln|x| + c$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{8u-3}{4u^2-3u-1}du + \left(-1+\frac{3}{4}\right)\int \frac{du}{4u^2-3u-1} = \frac{1}{2}\ln|x|+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\ln|4u^2-3u-1| - \frac{1}{16}\int \frac{du}{u^2-\frac{3}{4}u-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\ln|x|+C$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}$ tamamla ($u=xy$ koy)

Ör: $(x+y)^2 e^{-x-y} = y'+1$, $\quad -x-y = -(x+y)$

$x+y=u$

$1+y'=u' \Rightarrow y'=u'-1$

$$\Rightarrow u^2 e^{-u} = u' \cancel{-1} \cancel{+1}$$

$$u^2 e^{-u} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{u^2 e^{-u}} = dx$$

$$\int \frac{e^u}{u^2}du = x+C$$

$$= \int \frac{1+u+\frac{u^2}{2!}+\dots+\frac{u^n}{n!}+\dots}{u^2}du = x+C$$

$$= \int \frac{du}{u^2} + \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2!}\int du + \frac{1}{3!}\int u\,du + \dots + \frac{1}{n!}\int u^{n-2}du + \dots = x+C$$

$$= -\frac{1}{u} + \ln|u| + \frac{1}{2!}u + \frac{1}{3!}\frac{u^2}{2} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{1}{n-1}u^{n-1} + \dots = x+C$$

$$\boxed{= -\frac{1}{x+y} + \ln|x+y| + \frac{1}{2!}(x+y) + \frac{1}{3!}\frac{(x+y)^2}{2} + \dots + \frac{1}{n!}\frac{1}{n-1}(x+y)^{n-1} + \dots = x+C}$$

g.ç.

Ör: $\sin(x^3-y) = y' - 3x^2$

$x^3 - y = u$

$3x^2 - y' = u' \Rightarrow y' = 3x^2 - u'$

$\Rightarrow \sin(u) = \cancel{3x^2} - u' - \cancel{3x^2}$

$\sin(u) = -\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{du}{\sin(u)} = -dx$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{\sin u} = -x + c$

$\displaystyle\int f(\cos x, \sin x)\,dx$, (f rasyonel)

$\tan\frac{x}{2} = t$

$\frac{x}{2} = \arctan t \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{t^2+1}$

$\sin x = \dfrac{2t}{t^2+1}$

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{t^2+1}$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = -x + c$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{2dt}{2t} = -x + c$

$\Rightarrow \ln|t| = -x + c$

$\Rightarrow \ln\left|\tan\frac{y}{2}\right| = -x + c \Rightarrow \boxed{\ln\left|\tan\frac{(x^3-y)}{2}\right| = -x + c}$ g.c.

Ör: $\dfrac{\sqrt{1-(2x-y)^2}}{2(2x-y)} = y' - 2$

$2x - y = u$

$2 - y' = u'$

$y' = 2 - u'$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{1-u^2}}{2u} = \cancel{2} - u' - \cancel{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{1-u^2}}{2u} = -\dfrac{du}{dx}$

$\Rightarrow \dfrac{2u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = -dx$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{2u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = -x + c$

$u^2 = t$

$2u\,du = dt$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -x + c \Rightarrow -2\sqrt{1-t} = -x + c \Rightarrow \boxed{-2\sqrt{1-(2x-y)^2} = -x + c}$ g.c.

1

I. MERTEBEDEN YÜKSEK DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$f(x,y,c)=0$

$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow F(x,y,y')=0$ dif. denklemi olsun

a-) y' yani p'ye göre çözülebilen denklemler

$F(x,y,y')=0$ denklemi I. mertebeden ve n. dereceden olsun, bu denklemin en azından n tane lineer çarpana ayrıl dığını farzedelim. Bu tür denklemlerde gösterim açısından $y'=p=\frac{dy}{dx}$ kullanılır. Dolayısıyla bu durumdaki denklemlere p'li denklemlerde diyebiliriz.

Bu durumda;

$$F(x,y,y')=[y'-f_1(x,y)]\cdot[y'-f_2(x,y)]\cdots[y'-f_n(x,y)]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y'=f_1(x,y) \\ y'=f_2(x,y) \\ \vdots \\ y'=f_n(x,y) \end{array}\right\} \text{çözümler} \Rightarrow \begin{array}{l} \longrightarrow F_1(x,y,c_1)=0 \\ \longrightarrow F_2(x,y,c_2)=0 \\ \vdots \\ \longrightarrow F_n(x,y,c_n)=0 \end{array}$$

Söz konusu denklem için;

$F_1(x,y,c_1)\cdot F_2(x,y,c_2)\cdots F_n(x,y,c_n)=0$ ifadesine genel çözüm olarak bakabiliriz. Fakat burada bir terslik (aykırılık) söz konusudur.

$c_1=c_2=c_3=\dots=c_n=c$ alırsak

$$\boxed{F_1(x,y,c)\cdot F_2(x,y,c)\cdots F_n(x,y,c)=0} \quad \text{g.ç.}$$

1

Ör)
$$(y')^2+(x+y)y'+xy=0$$

veya $p^2+(x+y)p+xy=0$

$$p_{1,2}=\frac{-(x+y)\mp\sqrt{(x+y)^2-4xy}}{2}$$

$p_1=-x=y'$ $\quad p_2=-y=y'$

$(p+x)(p+y)=0 \Rightarrow (y'+x)(y'+y)=0$

$y'+x=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-x \Rightarrow dy=-x\,dx$

$y=-\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow y+\frac{x^2}{2}-c=0$

$y'+y=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=-y \Rightarrow \frac{dy}{y}=-dx$

$\ln|y|=-x+c \Rightarrow \ln|y|+x-c=0$

$\Rightarrow \boxed{\left(y+\frac{x^2}{2}-c\right)\left(\ln|y|+x-c\right)=0}$ g.c.

Ör) $p^2-2px+x^2-y^2=0 \rightarrow p_1=x-\sqrt{x^2-(x^2-y^2)}$

$p_1=x-y$ $\quad p-x+y=0$

$p_2=x+\sqrt{x^2-(x^2-y^2)}$

$p_2=x+y$ $\quad p-x-y=0$

$\Rightarrow (p-x+y)(p-x-y)=0$

$p_1=\frac{dy}{dx}=x-y \Rightarrow \underbrace{\frac{dy}{dx}+y=x}_{\text{lineer}} \Rightarrow \lambda=e^x,\ e^x\cdot y=\int xe^x dx+c$

$=xe^x-e^x+c$

$y=x-1+ce^{-x}$

$\boxed{y-x+1-ce^{-x}=0}$

$p_2=\frac{dy}{dx}=x+y \Rightarrow \underbrace{\frac{dy}{dx}-y=x}_{\text{lineer}}$

$\lambda=e^{-x} \Rightarrow e^{-x}\cdot y=\int x\cdot e^{-x}dx+c$

$\Rightarrow$ $=-xe^{-x}-e^{-x}+c \Rightarrow \boxed{y+x+1-ce^{-x}=0}$

$$\boxed{(y-x+1-ce^{-x})(y+x+1-ce^{-x})=0}$$ g.ç.

b-) y'ye göre çözülebilen denklemler

$F(x,y,y')=0$ bu denklemin y'ye göre çözülebildiğini farz edelim. ($y' \to p$)

$$y=f(x,p)$$

↳ x'e göre türev alırız

$$\underbrace{y'=p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{lineer}}$$

Çözüm: $p=\varphi(x,c)$ şeklinde veya $x=\psi(p,c)$ şeklinde olur.

* Eğer $p=\varphi(x,c)$ durumunda ise $\left.\begin{array}{l} y=f(x,p) \\ p=\varphi(x,c)\end{array}\right\}$ den

$$\boxed{y=f(x,\varphi(x,c))}$$ g.ç.

* Eğer $x=\psi(p,c)$ durumunda ise $\left.\begin{array}{l} y=f(x,p) \\ x=\psi(p,c)\end{array}\right\}$ den

p yok edilebiliyorsa genel çözüm, yok edilemiyorsa

$\left.\begin{array}{l} x=\psi(p,c) \\ y=f(\psi(p,c),p)\end{array}\right\}$ parametrik çözüm yapılır. Yani x ve y p cinsinden ifade edilir.

Ör: $y=x^2p+1$

$$y'=p=2xp+x^2\frac{dp}{dx}$$

$$p(1-2x)=x^2\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{1-2x}{x^2}dx$$

$$\ln p=-\frac{1}{x}-2\ln x+\ln c$$

$$p=c\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$y = x^2p + 1$ 'den $\Rightarrow \boxed{y = ce^{-1/x} + 1}$ g.c.

Ör: $16x^2 + 2p^2y - p^3x = 0$

$$2y = px - 16\frac{x^2}{p^2}$$

$$2y' = 2p = p + x\frac{dp}{dx} - 16\,\frac{2x\,p^2 - 2x^2p\frac{dp}{dx}}{p^4}$$

$$p^5 - p^4x\frac{dp}{dx} + 32xp^2 - 32x^2p\frac{dp}{dx} = 0$$

$$p^2(p^3 + 32x) - xp\frac{dp}{dx}(p^3 + 32x) = 0$$

$$(p^3 + 32x)\underbrace{\left(p^2 - xp\frac{dp}{dx}\right)}_{\text{türevli yerden çözülür.}} = 0$$

$$p^2 - xp\frac{dp}{dx} = 0, \quad (p \neq 0)$$

$$p = x\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln p = \ln x + \ln c$$

$$\boxed{p = x \cdot c}$$

$16x^2 + 2p^2y - p^3x = 0$ 'dan

$$16x^2 + 2c^2x^2y - x^4 \cdot c^3 = 0$$

$$\boxed{16 + 2c^2y - x^2c^3 = 0} \quad \text{g.c.}$$

Ör: $y = (2+p)x + p^2$

$$y' = \cancel{p} = 2 + \cancel{p} + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$2 + (x+2p)\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-2}{x+2p}$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x+2p}{-2} \Rightarrow \underbrace{\frac{dx}{dp} + \frac{x}{2} = p}_{\text{lineer}}$$

çözüm: $\lambda = e^{p/2}$

$$e^{p/2}\cdot x = -\int p e^{p/2} dp + c \qquad \begin{cases} u = p \Rightarrow du = dp \\ dv = e^{p/2} dp \Rightarrow v = 2e^{p/2} \end{cases}$$

$$= -2pe^{p/2} + 2\int e^{p/2} dp + c$$

$$= -2pe^{p/2} + 4e^{p/2} + c$$

$$\boxed{x = -2p + 4 + c\cdot e^{-p/2}}$$

$y = (2+p)x + p^2$'den

$$x = -2p + 4 + ce^{-p/2}$$

$$\boxed{y = (2+p)(-2p+4+ce^{-p/2}) + p^2}$$ parametrik çözüm

Bu gruba giren özel iki tane denklem var (yeni y'ye göre çözülebilen)

1-) Clairaut Diferansiyel Denklemi

$$\boxed{y = xp + f(p)}$$

$$y' = \cancel{p} = \cancel{p} + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow (x + f'(p))\frac{dp}{dx} = 0$$

$\frac{dp}{dx}=0$ olmalı $\Rightarrow$ $\boxed{p=c}$ $\left.\begin{matrix} \\ y=xp+f(p)\end{matrix}\right\}$ den $\Rightarrow$ $\boxed{y=xc+f(c)}$

g.c.

Ör: $y=xp+\underbrace{e^p+\sin p+\frac{2}{e^p+e^{-p}}}_{f(p)}$ $\Rightarrow$ clairaut

$\Rightarrow \boxed{y=xc+e^c+\sin c+\frac{2}{e^c+e^{-c}}}$ g.c.

2.) Lagrange Diferansiyel Denklemi

$\boxed{y=xf(p)+g(p)} \rightarrow y'=\underbrace{p=f(p)+xf'(p)\frac{dp}{dx}+g'(p)\frac{dp}{dx}}$

lineer uygulanır

Ör: $y=\underbrace{xp^2}_{xf(p)}+\underbrace{p^3}_{g(p)}$

$y'=\underbrace{p=p^2+2xp\frac{dp}{dx}+3p^2\frac{dp}{dx}}$

$p(1-p)-p(2x+3p)\frac{dp}{dx}=0 \quad , (p\neq 0)$

$2x+3p\cdot\frac{dp}{dx}=1-p \rightarrow \frac{dp}{dx}=\frac{1-p}{2x+3p}$

$\frac{dx}{dp}=\frac{-(2x+3p)}{p-1}$

$\underbrace{\frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p-1}=\frac{-3p}{p-1}}$

lineer

$$\lambda = e^{2\int \frac{dp}{p-1}} = (p-1)^2$$

$$(p-1)^2 \cdot x = -3\int p(p-1)\,dp + c$$

$$= -3\int (p^2-p)\,dp + c$$

$$(p-1)^2\, x = -p^3 + \frac{3p^2}{2} + c$$

$$\boxed{x = \frac{-p^3 + 3p^2/2 + c}{(p-1)^2}} \text{ den}$$

$$y = xp^2 + p^3$$

$$\boxed{y = \left(-\frac{p^3 + 3/2\,p^2 + c}{(p-1)^2}\right)p^2 + p^3} \text{ parametrik çözüm}$$

c-) x'e göre çözülebilen denklemler

$F(x, y, p) = 0$ ⟩ Bu denklem x'e göre çözülebilir olsun

$p \to y'$

⟩ $x = f(y, p)$ şeklinde olsun buradan y'ye göre türev alınır ve $\left(\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} \longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = p\right)$ işlemler buna göre yürütülerek denklem çözülür. Çözüm y'ye göre çözülebilen durumdakiler gibi işlemler yürütülür.

Ör: $y - 3px - 6p^2y^2 = 0$

$$3x = \frac{y}{p} - 6py^2$$

$$3\frac{dx}{dy} = \frac{3}{p} = \frac{p - y\frac{dp}{dy}}{p^2} - 6y^2\frac{dp}{dy} - 12py$$

$$\underbrace{3p - p}_{2p} + y\frac{dp}{dy} + 6yp^3\frac{dp}{dy} + 12p^3y = 0$$

$$2p(1+6yp^2) + y\frac{dp}{dy}(1+6yp^2) = 0$$

$$(1+6yp^2)\underbrace{\left(2p+y\frac{dp}{dy}\right)}=0$$

$$y\frac{dp}{dy} = -2p \Rightarrow \frac{dp}{p} = -2\frac{dy}{y}$$

$$\ln p = -2\ln y + \ln c$$

$$\boxed{p = \frac{c}{y^2}}$$

$$y - 3px - 6p^2y^2 = 0$$

$$y - \frac{3cx}{y^2} - 6\frac{c^2}{y^2} = 0$$

$$\boxed{y^3 - 3cx - 6c^2 = 0} \text{ g.ç.}$$

ÖR: 3 $\quad p^3 - 2xyp + 4y^2 = 0$

$$2x = \frac{p^2}{y} + \frac{4y}{p}$$

$$\frac{2}{p} = \frac{2yp\frac{dp}{dy} - p^2}{y^2} + 4\frac{p - y\,dp/dy}{p^2}$$

$$\cancel{2y^2p} - 2yp^3\frac{dp}{dy} + p^4 - \overset{-2py^2}{\cancel{4py^2}} + 4y^3\frac{dp}{dy} = 0$$

$$p(p^3 - 2y^2) - 2y\,dp/dy\,(p^3 - 2y^2) = 0$$

$$(p^3 - 2y^2)\underbrace{(p - 2y\,dp/dy)}=0$$

$$p = 2y\frac{dp}{dy} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y}$$

$$\ln p = \frac{1}{2}\ln y + \ln c$$

$$\boxed{p = \sqrt{y}\cdot c}$$

$p^3 - 2xyp + 4y^2 = 0$

$y\sqrt{y}\cdot c^3 - 2xy\sqrt{y}\cdot c + 4y^2 = 0$

$\boxed{y^{3/2}c^3 - 2xy^{3/2}c + 4y^2 = 0}$ g.ç.

$x = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = -\frac{3p^2\frac{dp}{dy}}{p^6} - \frac{2p\frac{dp}{dy}}{p^4}$

ALIŞTIRMALAR (8)

1-) $xp^3 = 1 + p$
$x(y')^3 = 1 + y'$

2-) $p^2 - x^3(1-p) = 0$

3-) $y = e^p \cdot p^2$

4-) $y = p + \ln p$

5-) $(y - px)^2 = 1 + p^2$

6-) $y = 3xp + 6y^2p^2$

13-) $y^2p^2 + 3xp - y = 0$

7-) $y = p + xp^2$

8-) $yp^2 + 2xp - y = 0$

9-) $y = 2px + p^4x^2$

10-) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

11-) $8yp^2 - 2xp + y = 0$

12-) $x = yp + p^2$

14-) $3x^4p^2 - px - y = 0$

YÜKSEK MERTEBEDEN I. DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

A-) $P_n(x)\,y^{(n)} + P_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + P_2(x)\,y'' + P_1(x)\,y' + P_0(x)\,y = \begin{cases} 0 \to \text{(homojen durumu)} \\ f(x) \to \text{(homojen olmayan)} \end{cases}$

(değişken katsayılı)

B-) $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = \begin{cases} 0 \to \text{(homojen durumu)} \\ f(x) \to \text{(homojen olmayan)} \end{cases}$

(sabit katsayılı)

Fonksiyonlarda lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık

$y_1 = y_1(x)$
$y_2 = y_2(x)$
$\vdots$
$y_n = y_n(x)$

fonksiyonları verilsin bu fonksiyonlar için

$$\Rightarrow W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \Rightarrow \text{Vronski determinantı}$$

$\Rightarrow$ 1-) $W = 0$ ise $y_i(x)$'ler $(1 \leq i \leq n)$ lineer bağımlıdırlar.

2-) $W \neq 0$ ise " " lineer bağımsızdırlar.

Örnek: $y_1 = x$, $y_2 = 2x$

$$\Rightarrow W[x, 2x] = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2x = 0$$

x ile $2x$ lineer bağımlı

Örnek: $y_1 = x$, $y_2 = 2x^2$

$$\Rightarrow W[x, 2x^2] = \begin{vmatrix} x & 2x^2 \\ 1 & 4x \end{vmatrix} = 2x^2 \neq 0$$

x ile $2x^2$ lineer bağımsız.

Örnek: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$

$$\Rightarrow W[e^x, e^{-x}] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2e^0 \neq 0$$

e^x ile e^{-x} lineer bağımsız.

Örnek: $y_1 = 2$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$

$$\Rightarrow W[2, x, x^2] = \begin{vmatrix} 2 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-0) \neq 0$$

$2, x, x^2$ lineer bağımsız

a-) $P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$

homojen durumunu ele alalım. Böyle bir denklem için özel çözüm özelliğini söyleyebiliriz.

$$P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$$

Teorem: $y_1 = y_1(x)$ söz konusu denklemin bir özel çözümü ise $y = c_1 \cdot y_1$ de özel çözümdür.

Teorem: $y_2 = y_2(x)$ söz konusu denklemin bir özel çözüm ise $y = c_2 \cdot y_2$ de bir özel çözümdür.

Teorem: y_1, y_2 söz konusu denklemin lineer bağımsız iki özel çözümü ise $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ 'de bir özel çözümdür. Üstelik denklemin mertebesi kadar keyfi sabit içinde olduğundan bu çözüm aynı zamanda genel çözüm olur.

Teorem: y_1, y_2, y_3 lineer bağımsız olmak üzere 3. mertebeden bir denklem için birer özel çözüm ise $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$ 3. mertebeden denklemin genel çözümüdür.

Teorem: $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineer bağımsız olmak üzere n. mertebeden bir denklemin özel çözümü ise $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ söz konusu denklemin genel çözümüdür.

* $P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$

$$y'' + \underbrace{\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}_{px} y' + \underbrace{\left(\frac{P_0}{P_2}\right)}_{qx} y = 0$$

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x) \cdot y = 0}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

...../...../.......

Bu denklem için ; $y_1 = y_1(x)$ özel çözüm ise

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}\,dx}$$ => ikinci özel çözümdür.

y_1 ile y_2 lineer bağımsızdır.

=> $\boxed{y = c_1 \cdot y_1 + c_2 y_2}$ genel çöz.

Ör: $x^2y'' - xy' + y = 0$

$y_1 = x$ özel çözüm

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int -\frac{dx}{x}}}{x^2}\,dx$$

$$= x \int \frac{e^{\int \frac{dx}{x}}}{x^2}\,dx$$

$$= x \int \frac{x}{x^2}\,dx \Rightarrow x \cdot \ln x = y_2$$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \Rightarrow \boxed{y = c_1 \cdot x + c_2\, x \cdot \ln x}$ g.ç.

Ör: $x^2y'' + xy' - y = 0$

$y_1 = x$ ö.ç.

$$y_2 = x \int \frac{e^{-\int \frac{dx}{x}}}{x^2}\,dx \Rightarrow y_2 = x \cdot \int \frac{\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$$

$$y_2 = x \int \frac{dx}{x^3} \Rightarrow y_2 = x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right)$$

$$y_2 = -\frac{1}{2x}$$

$\boxed{y = c_1 \cdot x + c_2 \left(-\frac{1}{2x}\right)}$ g.ç.

Ör: $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ denklemi için $y_1 = \frac{\cos x}{x}$ bir özel çözüm dur.

$$y_2 = \frac{\cos x}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x} dx}}{\frac{\cos^2 x}{x^2}} dx$$

$$= \frac{\cos x}{x} \int \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\cos^2 x}{x^2}} dx$$

$$= \frac{\cos x}{x} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{\cos x}{x} \tan x \Rightarrow y_2 = \frac{\sin x}{x}$$

$$\boxed{y = c_1 \frac{\cos x}{x} + c_2 \frac{\sin x}{x}}$$

9.4.

MERTEBE DÜŞÜRME

a-) Genel durum için başka bir çözüm metodu (mertebe düşürme)

$P_n(x) y^n + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + P_2(x) y'' + P_1(x) y' + P_0(x) y = 0$ denklemi için $y_1 = y_1(x)$ bir özel çözüm olsun bu durumda;

$y = y_1 \cdot z$, $z = z(x)$ $(z = ?)$ dönüşümü ile esas denklemin mertebesi bir indirilecektir.

$$\left.\begin{aligned} y' &= \dots \\ y'' &= \dots \\ &\vdots \\ y^n &= \dots \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ denklemde yerine yazılır. Sadeleşme sonucu z'li terim yok olur. z'nin türevleri cinsinden bir durum söz konusu olur. Sonra en küçük türevli

$$\left.\begin{aligned} z' &= u, \quad u = u(x), \ (u = ?) \\ z'' &= u' \\ &\vdots \\ z^n &= u^{(n-1)} \end{aligned}\right\}$$

ile esas denklemin mertebesi sonucta bir indirilmiş olur. Bu kuralla böyle devam edilir.

Ör: 3 $y'' - \frac{2}{\sin^2 x} y = 0$, $y_1 = \cot x$ dğu veriliyor.

$y = z\cdot\cot x$, $z = z(x) = ?$

$y' = z'\cdot\cot x - \frac{z}{\sin^2 x}$

$y'' = z''\cot x - \frac{z'}{\sin^2 x} - \frac{z'\sin^2 x - 2z\cdot\sin x\cos x}{\sin^4 x}$

$\Rightarrow y'' = z''\frac{\cos x}{\sin x} - 2\frac{z'}{\sin^2 x} + \frac{2z\cos x}{\sin^3 x}$

$\Rightarrow z''\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2z'}{\sin^2 x} + \cancel{\frac{2z\cos x}{\sin^3 x}} - \cancel{\frac{2z\cdot\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin^2 x}} = 0$

$\Rightarrow z''\cdot\sin x\cdot\cos x - 2z' = 0$

$\Rightarrow z''\frac{\sin 2x}{2} - 2z' = 0$

$\Rightarrow z''\sin 2x - 4z' = 0$, $z' = u$, $u = u(x) = ?$

$\Rightarrow u'\sin 2x - 4u = 0$

$\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{du}{dx}\sin 2x = 4u \Rightarrow \frac{du}{4u} = \frac{dx}{\sin 2x}$

$\ln u = 4\int\frac{dx}{\sin 2x}$ $\quad 2x = v$, $dx = \frac{dv}{2}$

$\ln u = 4\int\frac{dv}{2\sin v}$ $\quad \tan\frac{v}{2} = t$

$\ln u = 2\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}$ $\quad dv = \frac{2dt}{t^2+1}$ $\quad \sin v = \frac{2t}{t^2+1}$

$\ln u = 2\ln t + \ln c_1$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

$$u = c_1 t^2 = \underbrace{c_1 \cdot \tan^2 x = \frac{dz}{dx}} = z'$$

$$dz = c_1 \cdot \tan^2 x \, dx$$

$$z = c_1 \int \tan^2 x \, dx + c_2$$

$$= c_1 \int (1+\tan^2 x - 1) \, dx + c_2$$

$$z = c_1 \int (1+\tan^2 x) - c_1 \int dx + c_2$$

$$z = c_1 \cdot \tan x - c_1 \cdot x + c_2$$

$$y = z \cdot \cot x \Rightarrow \boxed{y = \cot x \cdot [c_1 \tan x - c_1 x + c_2]} \text{ g.c.}$$

Ör: $x^2 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ $\quad y_1 = x$ ö.c. olsun

$$y = x \cdot z$$
$$y' = z + x \cdot z'$$
$$y'' = 2z' + x \cdot z''$$
$$y''' = 3z'' + x \cdot z'''$$

$$\Rightarrow x^4 z''' = 0 \rightarrow (x \neq 0)$$

$$z''' = 0 \rightarrow z'' = c_1$$
$$z' = c_1 x + c_2$$
$$z = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$y = xz$'den

$$\boxed{y = x\left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3\right)} \text{ g.c.}$$

ALIŞTIRMALAR (9)

1-) $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$

2-) $xy'' - (x+2)y' + y = 0$

3-) $x^2 y'' + xy' - (x^2+x+1)y = 0$, $\quad y_1 = \frac{e^{-x}}{x}$

4-) $xy'' + (3x-1)y' + 2(x-1)y = 0$, $\quad y_1 = -2e^{-2x}$

b-) $P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_2(x)y' + P_1(x)y = f(x)$ (1)

Bu denklemi iki yapıda çözeceğiz.

★ $P_n(x)y^{(n)} + \dots + P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$ (Homogen durumu)

bu denklemin genel çözümü bulunur.

$y_{h.g.ç} \Rightarrow$ homogen kısmın genel çözümü

(1) numaralı denklemin genel çözümü

$$y_{g.ç} = \boxed{y = y_{h.g.ç} + y_{ö.ç}}$$

($y_{ö.ç} \Rightarrow$ (1)'in tamamı için özel çözüm)

Ör: $x^2y'' - xy' + y = 2$ genel çözümünü bulunuz.

$x^2y'' - xy' + y = 0$

$y = x$ özel çözüm

$y_{h.g.ç} = c_1x + c_2 x\ln x$

$y = x+2$ denklemin tamamı için bir özel çözüm ($y=2$ ile sağlar)

$y_{g.ç} = y_{h.g.ç} + y_{ö.ç} = y$

$$\boxed{y = c_1x + c_2x\ln x + x + 2} \text{ g.ç.}$$

c-) $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$

Bu tür denklemlerin genel çözümü yukarıda ifade edilen teoremler zinciri yapısıyla bulunur.

Ör: $y'' + y' - 2y = 0$ $\quad y_1 = e^x, \ y_2 = e^{-2x}$

$$\boxed{= e^x c_1 + c_2 e^{-2x}} \text{ g.ç.}$$

Bütün türevleri kendisine benzeyen $y = e^{kx}$ şeklinde yukarıdaki denklemin özel çözümü aranır.

$y=e^{kx}$, (k bilinmiyor (bulunacak))

$$\left.\begin{aligned} y' &= ke^{kx} \\ y'' &= k^2e^{kx} \\ y''' &= k^3e^{kx} \\ &\vdots \\ y^n &= k^ne^{kx} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &a_nk^ne^{kx}+a_{n-1}k^{n-1}e^{kx}+\dots+a_2k^2e^{kx}+a_1ke^{kx}+a_0e^{kx}=0 \\ &e^{kx}(a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\dots+a_2k^2+a_1k+a_0)=0 \quad (e^{kx}\neq 0 \ \forall x \text{ için}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_nk^n+a_{n-1}k^{n-1}+\dots+a_2k^2+a_1k+a_0=0}$$

verilen denklemin (esas denklemin) karakteristik denklemi denir.

HATIRLATMA

$x^2+bx+c=0$ (Diskriminantla çözülebilir)

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ (Çarpanlarına ayrılabilir yoksa katsayılar toplamı sıfırsa "1" köktür.) (d'nin çarpanları kök olur) $(-x)$

Karakteristik denklemin köklerinin durumlarına göre çözümleri şöyledir

1-) Karakteristik denklemin kökleri birbirinden farklı reel sayılar olsun. ($k_1\neq k_2\neq\dots\neq k_n$) Bu durumda genel çözüm;

$$y_{g.ç}=y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}+c_3e^{k_3x}+\dots+c_ne^{k_nx}$$

Ör! $y''+y'-2y=0$

$k^2+k-2=0$

$(k+2)(k-1)=0$

$k=1,\ k=-2$

$$\boxed{y_{g.ç}=y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}}\ g.ç.$$

Ör: $y'' + 5y' - 6y = 0$

3

$k^2 + 5k - 6 = 0$

$(k+6)(k-1) = 0$

$k = -6,\ k = 1$

$$\boxed{y_{g.ç} = y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-6x}}$$ g.ç.

Ör: $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$

3

$k^3 + 2k^2 - 5k - 6 = 0$

$-1 \quad 6 \quad 1 \quad -6$
$-2 \quad 3 \quad 2 \quad -3$

$k' = -1$

$$\begin{array}{l|l} k^3 + 2k^2 - 5k - 6 & k+1 \\ \underline{k^3 + k^2} & k^2 + k - 6 \\ \quad k^2 - 5k - 6 & \\ \quad \underline{k^2 + k} & \\ \quad\quad -6k - 6 & \end{array}$$

$k^2 + k - 6 = 0$

$(k+3)(k-2) = 0$

$k = -3 \quad k = 2$

$$\boxed{y_{g.ç} = y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}}$$ g.ç.

2-) Karakteristik denklemin kökleri birbirine eşit reel sayılar olsun

$k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n$

$y_{g.ç} = y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1}) e^{k_1 x}$ şeklindedir.

Ör; $y'' - 2y' + y = 0$

3

$k^2 - 2k + 1 = 0$

$(k-1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1$

$y_{g.ç} = y = (c_1 + c_2 x) e^{x}$

Ör: $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

3

$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0$

$(k+1)^3 = 0 \quad k_1 = k_2 = k_3 = -1$

$y_{g.ç} = y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x}$

..... / ..... / .....

3-) Karekteristik denklemin köklerinden bir kısmı birbirine eşit reel sayılar bir kısmıda birbirinden farklı reel sayılar olsun.

$k_1 = k_2 = \dots = k_p, \quad k_{p+1} \neq k_{p+2} \neq \dots \neq k_n$

$y_{g.a} = y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_p x^{p-1}) e^{k_1 x} + c_{p+1} e^{k_{p+1} x} + c_{p+2} e^{k_{p+2} x} + \dots + c_n e^{k_n x}$

Ör: $y^{IV} - 5y''' - 6y'' = 0$

3

$k^4 - 5k^3 - 6k^2 = 0$

$k^2 (k^2 - 5k - 6) = 0$

$k_1 = k_2 = 0 \quad k_3 = 1 \quad k_4 = -6$

$y_{g.a} = y = (c_1 + c_2 x) e^{0 \cdot x} + c_3 e^{x} + c_4 e^{-6x}$

$\boxed{y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + c_4 e^{-6x}}$ g.ç.

Ör: $y^{IV} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$

3

$k^4 - k^3 - 9k^2 - 11k - 4 = 0$

1, 4, 2, −2 ; −4, −1, −2, 2

$1 + 1 - 9 + 11 - 4 = 0, \Rightarrow k = -1$ kök

$k^4 - k^3 - 9k^2 - 11k - 4 \;|\; k+1$

$k^4 + k^3$

$-2k^3 - 9k^2 - 11k - 4$

$-2k^3 - 2k^2$

$-7k^2 - 11k - 4$

$-7k^2 - 7k$

$-4k - 4$

$k^3 - 2k^2 - 7k - 4 = 0 \;|\; k+1$

$k^3 + k^2$

$-3k^2 - 7k - 4$

$-3k^2 - 3k$

$-4k - 4$

$k^2 - 3k - 4 = 0$

$(k-4)(k+1) = 0$

$k_1 = k_2 = k_3 = -1, \quad k_4 = 4$

$\boxed{y_{g.a} = y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x} + c_4 e^{4x}}$ g.ç.

4-) Karakteristik denklemin kökleri kompleks sayı olsun ($a \mp ib$)

$z = a + ib \;,\; a, b \in \mathbb{R} \;,\; i = \sqrt{-1}$

$\bar{z} = a - ib$

$$\boxed{e^{\mp i\theta} = \cos\theta \mp i\sin\theta}$$

$\left.\begin{array}{l} k_1 = a + ib \\ k_2 = a - ib \end{array}\right\}$ olsun

$$y_{g.ç} = y = \underbrace{A e^{(a+ib)x} + B e^{(a-ib)x}}$$

$$y = A e^{ax} \cdot e^{ibx} + B e^{ax} \cdot e^{-ibx}$$

$$y = e^{ax}\left[A(\cos bx + i\sin bx) + B(\cos bx - i\sin x)\right]$$

$$y = \left[\underbrace{(A+B)}_{c_1}\cos bx + \underbrace{i(A-B)}_{c_2}\sin bx\right]e^{ax}$$

$$\boxed{y = (c_1\cos bx + c_2\sin bx)\, e^{ax}} \quad g.ç.$$

Ör: $y'' + y' + y = 0$

$k^2 + k + 1 = 0 \quad k_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$k_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{y_{g.ç} = \left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-1/2x}} \quad g.ç.$$

Ör: $y'' + y = 0$

$k^2 + 1 = 0 \quad k_1 = -i = 0 - i$

$k_2 = i = 0 + i$

$a = 0 \quad b = 1$

$$y_{g.ç} = y = (c_1 \cdot \cos x + c_2\sin x)\, e^{0x}$$

$$\boxed{y = c_1 \cdot \cos x + c_2\sin x} \quad g.ç.$$

Ör: 3 $y^{IV} + y''' + 2y'' - y' + 3y = 0$

$k^4 + k^3 + 2k^2 - k + 3 = 0$

$(k^2 + 2k + 3)(k^2 - k + 1) = 0$

$k_1 = -1 - \sqrt{2}i$

$k_2 = -1 + \sqrt{2}i$

$k_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$y_{g.ç} = y = \underbrace{(c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x)e^{-x} + (c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{1/2 x}}$

p.ç.

5-) Kökler komplex ve katlı olsun

Ör: 3 $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$

$k^4 + 8k^2 + 16 = 0$

$(k^2+4)^2 = 0 \Rightarrow k^2 + 4 = 0$

$k_1 = -2i = k_3$

$k_2 = 2i = k_4$

$y_{g.ç} = y = \left[(c_1 + c_2x)\cos 2x + (c_3 + c_4x)\sin 2x\right]\underset{1}{e^{0x}}$

$\boxed{y = (c_1 + c_2x)\cos 2x + (c_3 + c_4x)\sin 2x}$ p.ç.

Değişken Katsayılı Homojen Denklemler için Özel Tipte Denklemler

1-) Euler diferansiyel denklemi:

$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$

$x = e^t$ dönüşümü uygulucaz.

$x = e^t \rightarrow dx = e^t . dt \rightarrow \frac{dt}{dx} = e^{-t}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$= \underset{\dot{y}}{\frac{dy}{dt}} \cdot e^{-t} = \underbrace{e^{-t} . \dot{y}} = y'$

...../...../.......

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dt}(e^{-t}\cdot \dot{y}) \frac{dt}{dx}$$ e^{-t}

$$y'' = [e^{-t}\dot{y} + e^{-t}\cdot\ddot{y}]e^{-t}$$

$$\underbrace{y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dt}\left[e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})\right] \frac{dt}{dx}$$ e^{-t}

$$y''' = \left[-2e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) + e^{-2t}(\dddot{y} - \ddot{y})\right]e^{-t}$$

$$y''' = e^{-3t}\underbrace{(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})}$$

Bu değerler denklemde yerlerine yazılırsa denklem sabit katsayılı hale gelir. Ordo çözülür.

Ör: $x^2y'' - xy' + y = 0$

$x = e^t$, $y' = e^{-t}\cdot\dot{y}$, $y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$$\underbrace{e^{2t}\cdot e^{-2t}}_{1}(\ddot{y} - \dot{y}) - \underbrace{e^{t}\cdot e^{-t}}_{1}\cdot\dot{y} + y = 0$$

$$\ddot{y} - \dot{y} - \dot{y} + y = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = 1$$

$$\underbrace{y = y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t} \qquad \begin{pmatrix} x = e^t \\ t = \ln x \end{pmatrix}$$

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x$$

$$\boxed{y = c_1 x + c_2 \ln x \cdot x}$$ p.c.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör: 3 $x^2y'' + xy' + y = 0$

$x = e^t$, $y' = e^{-t}\dot{y}$, $y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$e^{2t}.e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) + e^{t}.e^{-t}\dot{y} + y = 0$

$\ddot{y} + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -i$
$r_2 = i$

$y(t) = c_1 . \cos t + c_2 . \sin t$

$$\boxed{y = c_1 . \cos \ln x + c_2 \sin \ln x}$$ p.c.

2-) Legendre Diferansiyel Denklemi

$a_n (bx+c)^n y^{(n)} + a_{n-1} (bx+c)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 (bx+c)^2 y'' + a_1 (bx+c) y' + a_0 y = 0$

Çözüm: $bx + c = e^t \Rightarrow \boxed{\dfrac{dt}{dx} = be^{-t}}$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} . \dfrac{dt}{dx} = b . e^{-t} . \dot{y}$

$y'' = b^2 e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$

$y''' = b^3 e^{-3t} (\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})$ - - - - - -

Bu değerler denklemde yerine yazılırsa denklem sabit katsayılı şekle gelir. O'da çözülür.

Ör: 3 $(x-1)^2 y'' + (x-1) y' + y = 0$

$x - 1 = e^t \Rightarrow y' = e^{-t} . \dot{y}$

$y'' = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$

$e^{2t} e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y}) + e^{t} . e^{-t} . \dot{y} + y = 0$

$\ddot{y} - \cancel{\dot{y}} + \cancel{\dot{y}} + y = 0$

$\ddot{y} + y = 0 \rightarrow r_1 = -i$
$\rightarrow r_2 = i$

$y(t) = c_1 . \cos t + c_2 \sin t$

$$\boxed{y = c_1 . \cos \ln(x-1) + c_2 \sin \ln(x-1)}$$ p.c.

$x - 1 = e^t \rightarrow t = \ln(x-1)$

Ör: $(2x+1)^2 y'' + (2x+1)y' - \frac{3}{4}y = 0$

3

$2x+1 = e^t$

$y' = 2e^{-t}\cdot \dot{y}$

$y'' = 4\cdot e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$\Rightarrow 4e^{2t}\cdot e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) + 2\cdot e^{-t}\cdot e^t \dot{y} - \frac{3}{4}y = 0$

$4\ddot{y} - 4\dot{y} + 2\dot{y} - \frac{3}{4}y = 0$

$\underbrace{4\ddot{y} - 2\dot{y} - \frac{3}{4}y = 0}$

$4k^2 - 2k - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow k_1 = \frac{1 - \sqrt{1+3}}{4} = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}$

$\rightarrow k_2 = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

$y(t) = c_1\cdot e^{-1/4 t} + c_2 e^{3/4 t}$

$\boxed{y = c_1(2x+1)^{-1/4} + c_2(2x+1)^{3/4}}$ g.ç.

Lineer Diferensiyel Denklemler İçin Varlık ve Teklik Teoremi

$p = p(x)$, $q = q(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları bir a noktasını içeren bir I aralığı üzerinden sürekli olsun bu takdirde b_0, b_1 verilen sabitler olmak üzere

(1) $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ denklemi I'nın tamamından $y(a) = b_0$, $y'(a) = b_1$ (2) başlangıç şartlarını sağlayan bir tek çözüme sahiptir.

Bir denklemin ve iki başlangıç şartları birlikte ikinci mertebeden bir lineer başlangıç değer problemi oluşturur.

$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$ denklemi genelde verilen bir (a,b) başlangıç noktasından geçen bir tek $y = y(x)$ çözüm eğrisi kabul etmesine rağmen (1)'deki 2. mertebeden denklemin (a, b_0) noktasından geçen sonsuz sayıda çözüm eğrisine sahip olduğunu; fakat bu çözümlerden sadece bir tanesinin $y'(a) = b_1$ başlangıa eğimi olduğunu belirtir. Yani (a, b_0)'dan geçen bir çözüm eğrisine teğet olan sadece bir doğrunun var olması, yerine (a, b_0)'dan geçen ve düşey olmayan her doğru (1) denkleminin bir çözüm eğrisine teğettir.

Ör: $y'' + y = 0$ için $y'(0) = 3$, $y'(0) = -2$

$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -i$, $k_2 = i$

$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x}$ g.ç.

$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$

$y(0) = 3$, $y'(0) = -2$

$y(0) = 3 = c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot \sin 0$

$\boxed{3 = c_1}$

$y'(0) = -2 = -c_1 \sin 0 + c_2 \cdot \cos 0$

$\boxed{-2 = c_2}$

$\boxed{y = 3 \cdot \cos x - 2 \sin x}$ ö.ç.

Ör: $x^2 y'' + x y' + y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$

$x = e^t$

$y' = e^{-t} \cdot \dot{y}$

$y'' = e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y})$

$e^{2t} \cdot e^{-2t} (\ddot{y} - \dot{y}) + e^t \cdot e^{-t} (\dot{y}) + y = 0$

$k^2 + 1 = 0 \rightarrow k_1 = -i$, $k_2 = i$

$y = y(t) = c_1 \cdot \cos t + c_2 \sin t$ $\qquad \ln x = t$

$y = y(x) = c_1 \cdot \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$

$y(1) = 2$

$y'(1) = 3$

$y' = -c_1 \frac{1}{x} \sin \ln x + c_2 \frac{1}{x} \cos(\ln x)$

/ 1 /

$c_1 \cdot \cos(\cancel{\ln 1}) + c_2 \sin(\cancel{\ln 1}) = 2$

$\boxed{c_1 = 2}$

$-c_1 \sin(\cancel{\ln 1}) + c_2 \cos(\cancel{\ln 1}) = 3$

$\boxed{c_2 = 3}$

$$\boxed{y = 2\cos\ln x + 3\sin\ln x}$$

p.c.

Ör: 3) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 0$

$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$

$(k-1)^3 = 0$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$

$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$

$y = y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 0$

$y' = (c_2 + 2c_3 x)e^x + (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$

$y'' = 2c_3 e^x + (2c_2 + 4c_3 x)e^x + (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$

$\boxed{c_1 = 1}$ $\quad c_2 + c_1 = 4 \Rightarrow \boxed{c_2 = 3}$

$2c_3 + 2c_2 + c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{c_3 = -7/2}$

$$\boxed{y = \left(1 + 3x - \frac{7}{2}x^2\right)e^x}$$

p.c.

I. Lineer Burası Kader

1

Sabit Katsayılı Homogen Olmayan Denklemler

(1) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$

$y = \boxed{y_{g.ç} = y_{h.g.ç} + y_{ö.ç}}$ p.ç. idi. (Hem sabit hem de değişken katsayılı için geçerlidir.)

Çözüm metodları; (1 numaralı denklemin özel çözümünü aramak için)

$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \cdots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$

(1) denkleminin ikinci tarafı en genel anlamda $p(x).e^{kx}$ şeklinde olsun. $p(x)$ bir polinomdur. Şu metodik yapıyı ele alacağız;

1-) k karakteristik denklemin kökü olmasın

$\boxed{y_{ö.ç} = y = Q(x)e^{k.x}}$ şeklinde aranacak, burada $Q(x)$ $P(x)$'in derecesinden katsayıları bilinmeyen (bulunacak) bir polinomdur. Bunun için türevler alınır ve bu değerler (1) numaralı denklemde yerine konup eşitlik özdeşlikle ifade edilir. Bu özdeşlikten katsayılar bulunur.

Ör: 3 $y'' + 2y' - 3y = x^2 + x - 1 \xrightarrow{\text{esas yapı}} (x^2+x-1)e^{0x}$ ↘ $k=0$

$k^2 + 2k - 3 = 0$

$(k+3)(k-1) = 0 \quad \begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = -3 \end{matrix}$ } $k=0$ kök değil

$y_{ö.ç} = y = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b$

$y'' = 2a$

$2a + 4ax + 2b - 3ax^2 - 3bx - 3c \equiv x^2 + x - 1$

$-3ax^2 + x(4a - 3b) + 2a + 2b - 3c \equiv x^2 + x - 1$

$a = -1/3 \qquad 4a - 3b = 1 \qquad 2a + 2b - 3c = -1$

$b = -\frac{7}{9} \qquad -\frac{2}{3} - \frac{14}{9} - 3c = -1$

$-3c = -1 + \frac{20}{9}$

$c = -\frac{11}{27}$

....../....../......

$y_{öa} = -\frac{x^2}{3} - \frac{7x}{9} - \frac{11}{27}$

$\boxed{y_{g.a} = y = c_1e^{x} + c_2e^{-3x} - \frac{x^2}{3} - \frac{7}{9}x - \frac{11}{27}}$ p.a.

Ör: 3) $y'' + 2y' - 3y = 2e^{-x}$ → $k=-1$

$k^2 + 2k - 3 = 0$ → $k_1 = 1$, $k_2 = -3$ } $k=-1$ kök dğl

$y_{öa} = y = ae^{-x}$

$y' = -ae^{-x}$ $\quad ae^{-x} - 2ae^{-x} - 3ae^{-x} = 2e^{-x}$

$y'' = ae^{-x}$ $\quad -4a\cancel{e^{-x}} = 2\cancel{e^{-x}}$

$a = -\frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{a = -1/2}$

$y_{öa} = y = -\frac{1}{2}e^{-x}$

$\boxed{y_{g.a} = y = c_1e^{x} + c_2e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x}}$ p.a.

Ör: 3) $y'' + 2y' - 3y = xe^{-x}$ → $k=-1$

$k^2 + 2k - 3 = 0$ → $k_1 = 1$, $k_2 = -3$ } kök dğl

$y_{öa} = y = (ax+b)e^{-x}$

$y' = ae^{-x} + (-ax-b)e^{-x}$

$y'' = -ae^{-x} - ae^{-x} + (ax+b)e^{-x} = -2ae^{-x} + (ax+b)e^{-x}$

$(+\cancel{2a} + ax + b - a - 2ax - 2b - 3ax - 3b)\cancel{e^{-x}} = x\cancel{e^{-x}}$

$-4ax = x$ $\quad \boxed{a = -1/4}$

$-4a - 4b = 0$ $\quad \boxed{b = -\frac{1}{4}}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

1 ..../..../....

$$\boxed{y_{g.ç} = y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}}$$ p.ç

2-) k karakteristik denklemin r katlı kökü olursa, bu durumda özel çözüm şöyle aranır;

$$\boxed{y_{ö.ç} = y = Q(x) \cdot x^r e^{kx}}$$ $y', y'', \ldots$ türevler alınır yerine koyulur, gerekli özdeşlikten katsayılar bulunur.

Ör: $y'' + 2y' - 3y = 2e^x$

$k^2 + 2k - 3 = 0 \rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = -3$; $k = 1$ bir katlı kök

$y_{ö.ç} = y = a \cdot x e^x$

$y' = ae^x + axe^x$

$y'' = ae^x + ae^x + axe^x = 2ae^x + axe^x$

$(2a + ax + 2a + 2ax - 3ax)\cancel{e^x} \equiv 2\cancel{e^x}$

$4a = 2 \Rightarrow a = 1/2 \Rightarrow y_{ö.ç} = \frac{1}{2} x e^x$

$$\boxed{y_{g.ç} = y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{2} x e^x}$$ p.ç.

Ör: $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^x$

$k^2 - 2k + 1 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = 1$; $k = 1$ 2 katlı kök

$y_{ö.ç} = y = (ax^2 + bx + c)x^2 e^x$

$y = (ax^4 + bx^3 + cx^2)e^x$

$y' = (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)e^x + (ax^4 + bx^3 + cx^2)e^x$

$y'' = (12ax^2 + 6bx + 2c)e^x + (8ax^3 + 6bx^2 + 4cx)e^x + (ax^4 + bx^3 + cx^2)e^x$

$(12ax^2 + 6bx + 2c + \cancel{8ax^3} + \cancel{6bx^2} + \cancel{4cx} + ax^4 + bx^3 + \cancel{cx^2} - \cancel{8ax^3} - \cancel{6bx^2} - \cancel{4cx} - 2ax^4 - 2bx^3 - \cancel{2cx^2} + ax^4 + bx^3 + cx^2)\cancel{e^x} \equiv (x^2+1)\cancel{e^x}$

$12ax^2 + 6bx + 2c \equiv x^2 + 1$

$$\boxed{a = \frac{1}{12}} \quad \boxed{b = 0} \quad \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y_{g.ç} = (c_1 + c_2 x)e^{x} + \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{x}}$$

3-) ① numaralı denklemin 2. tarafı $P_1(x)\cos ax\, e^{kx}$ $(\sin ax)$ veya $P_2(x)\sin ax\, e^{kx}$ $((\cos ax))$ şeklinde olsun

a, k için $\boxed{k+ia}$ sayısını temsil eden bir kompleks sayı türünde ifade ediyoruz. Buna göre;

1-) $a+ik$ karakteristik denklemin kökü olmasın, bu durumda özel çözüm şöyle alınır.

$$\boxed{y_{ö.ç} = y = \left(Q_1(x)\cos ax + Q_2(x)\sin ax\right)e^{kx}}$$

türevler alınıp yerine koyulur ve özdeşlikten katsayılar bulunur.

Ör: $y'' + 2y' + y = 2\sin x$ $\quad 2\sin x\, e^{0x}$ $\quad k=0,\ a=1 \Big\}\ 0+i$

$k^2 + 2k + 1 = 0$

$\hookrightarrow k_1 = k_2 = -1$ ← kök değil.

$y_{ö.ç} = y = (a\cos x + b\sin x)\cancel{e^{0x}}$ 1

$y' = -a\sin x + b\cos x$

$y'' = -a\cos x - b\sin x$

$\cancel{-a\cos x} - \cancel{b\sin x} - 2a\sin x + 2b\cos x + \cancel{a\cos x} + \cancel{b\sin x} \equiv 2\sin x$

$-2a = 2 \Rightarrow a = -1$

$2b = 0 \Rightarrow b = 0$

$y_{ö.ç} = y = -\cos x$

$$\boxed{y_{g.ç} = y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} - \cos x}$$

Ör: $y'' + 2y' + y = 2\cos 2x\, e^{x}$

$k = 1$, $a = 2$ $\Big\} = (1 + 2i)$

$k^2 + 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -1$ ← böl değil

$y_{öz} = y = (a\cos 2x + b\sin 2x)\, e^{x}$

$--- = P_1(x)\cdot\cos ax\, e^{kx}$ veya $P_2(x)\sin ax\, e^{kx}$

$a + \cancel{ki}$

$\boxed{k + ai}$ → soruları düzelt

Ör: $y'' + 4y = x\sin x$

$k = 0,\ a = 1 \rightarrow 0 + i = i$

$k^2 + 4 = 0 \rightarrow k_1 = -2i,\ k_2 = 2i$ ← böl değil

$y_{öz} = y = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x$

$y' = a\cos x - (ax + b)\sin x + c\sin x + (cx + d)\cos x$

$y'' = -a\sin x - a\sin x - (ax + b)\cos x + c\cos x + c\cos x - (cx + d)\sin x$

$y'' = (-2a - cx - d)\sin x + (-ax - b + 2c)\cos x$

$(-2a - cx - d)\sin x + (-ax - b + 2c)\cos x + (4ax + 4b)\cos x + (4cx + 4d)\sin x \equiv x\sin x$

$(-2a - cx - d + 4cx + 4d)\sin x + (-ax - b + 2c + 4ax + 4b)\cos x \equiv x\sin x$

$(3cx + 3d - 2a)\sin x + (3ax + 3b + 2c)\cos x \equiv 0\cos x + x\sin x$

$3cx + 3d - 2a \equiv x$ $\qquad$ $3ax + 3b + 2c \equiv 0$

$3c = 1$ $\qquad$ $\boxed{a = 0}$ $\qquad$ $3b + 2c = 0$

$\boxed{c = 1/3}$ $\qquad$ $3b + 2/3 = 0$

$3d - 2a = 0$ $\qquad$ $\boxed{b = -2/9}$

$\boxed{d = 0}$

$$y.g.ç = \boxed{y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{2}{9}\cos x + \frac{1}{3}\sin x}$$

Ör: $y'' + y = e^x x\cos x$

$k = 1$, $a = 1$ } $1+i$

$k^2 + 1 = 0 \to k_1 = -i$, $k_2 = i$ — kök değil.

$$y.ö.ç = y = \left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]e^x$$

4-) $k+ia$ karakteristik denklemin r katlı kökü olsun. Bu durumda özel çözüm şöyle alınır;

$$y.ö.ç = y = \left[Q_1(x)\cos ax + Q_2(x)\sin ax\right]x^r \cdot e^{kx}$$

türevler alınır yerine koyulur, katsayılar bulunur.

Ör: $y'' + y = 2\cos x$

$k = 0$, $a = 1$ } $0 + i = \boxed{i}$

$k^2 + 1 = 0 \to k_1 = -i$, $k_2 = i$ — 1 katlı kök

$$y.ö.ç = y = (a\cos x + b\sin x)\,x$$

$$y' = a\cos x - ax\sin x + b\sin x + bx\cos x$$

$$y'' = b\cos x - (a+bx)\sin x - a\sin x + (-ax+b)\cos x$$

$$y'' = (-ax+2b)\cos x + (-2a-bx)\sin x$$

$$(-ax+2b)\cos x + (-2a-bx)\sin x + ax\cos x + bx\sin x \equiv 2\cos x$$

$$(2b)\cos x - 2a\sin x \equiv 2\cos x + 0\sin x$$

$2b = 2$, $\boxed{b = 1}$ $\quad \boxed{a = 0}$

$$y.g.ç = \boxed{y = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x}$$

Ör: 3 $y''+y=(x+1)\sin x$

$\to k=0,\ a=1 \} \ 0+i=i$

$k^2+1=0 \to k_1=-i$
$\to k_2=i \leftarrow$ 1 katlı kök

$y_{ö.ç}=y=[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]x$

$y=(ax^2+bx)\cos x+(cx^2+dx)\sin x$

$y'=(2ax+b)\cos x-(ax^2+bx)\sin x+(2cx+d)\sin x+(cx^2+dx)\cos x$

$y''=2a\cos x-(2ax+b)\sin x-(2ax+b)\sin x-(ax^2+bx)\cos x$
$2c\sin x+(2cx+d)\cos x+(2cx+d)\cos x-(cx^2+dx)\sin x$

$y''=(2a+4cx+2d-ax^2+bx)\cos x+(-4ax-2b+2c-cx^2-dx)\sin x$

$(\cancel{-ax^2}+(4c+b)\cancel{x}+2a+2d+\cancel{ax^2}+\cancel{bx})\cos x+(\cancel{-cx^2}-(4a+d)\cancel{x}-2b+2c+\cancel{cx^2}+\cancel{dx})\sin x$
$\equiv(x+1)\sin x$

$(4cx+2a+2d)\cos x+(-4dx-2b+2c)\cdot\sin x\equiv(x+1)\sin x$

$-4dx-2b+2c\equiv x+1$

$4cx+2a+2d\equiv 0$

$-4d=1 \qquad -2b+2c=1$

$c=0 \quad 2a+2d=0 \qquad \boxed{d=-\frac{1}{4}} \qquad \boxed{b=-1/2}$

$2a-1/2=0$

$\boxed{a=\frac{1}{4}}$

$\boxed{y_{g.ç}=y=c_1\cos x+c_2\sin x+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos x+\left(\frac{x}{4}\right)\sin x}$

P.G.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

...../...../.......

Tekrar ?

Ör: $y'' - 2y' + 2y = \sin x\, e^{x}$ → $r=1$, $\sigma=1$ } $1+i$ → 1 katlı kök

$r^2 - 2r + 2 = 0 \rightarrow r_1 = 1-i$

$\rightarrow r_2 = 1+i$

$y_{öç} = y = (a\cos x + b\sin x)\,x\,e^{x}$

$y = (ax\cos x + bx\sin x)e^{x}$

$y' = (a\cos x - ax\sin x + b\sin x + bx\cos x)e^{x} + (ax\cos x + bx\sin x)e^{x}$

$y' = [(a + bx + ax)\cos x + (-ax + b + bx)\sin x]e^{x}$

$y'' = [(b+a)\cos x - (a+bx+ax)\sin x + (-a+b)\sin x + (-ax+b+bx)\cos x]e^{x}$

$+ [(a+bx+ax)\cos x + (-ax+b+bx)\sin x]e^{x}$

$y'' = [(b + a - \cancel{ax} + b + bx + a + bx + \cancel{ax})\cos x + (-a - \cancel{bx} - ax - a + b - ax + b + \cancel{bx})\sin x]$

$\Rightarrow [(2bx + 2b + 2a)\cos x + (-2ax - 2a + 2b)\sin x]\cancel{e^{x}} + [-2a - 2bx - 2ax)\cos x +$

$(2ax - 2b - 2bx)\sin x]\cancel{e^{x}} + [2ax\cos x + 2bx\sin x]\cancel{e^{x}} \equiv \sin x\,\cancel{e^{x}}$

$[(2\cancel{bx} + 2b + \cancel{2a} - \cancel{2a} - \cancel{2bx} - 2ax)\cos x + (-\cancel{2ax} - 2a + \cancel{2b} + \cancel{2ax} - \cancel{2b} - 2bx)\sin x \equiv \sin x$

$(2b - \cancel{2ax})\cos x + (-2a - \cancel{2bx})\sin x \equiv \sin x$

$2b = 0 \qquad -2a = 1$

$\boxed{b = 0} \qquad \boxed{a = -\frac{1}{2}}$

$y_{g.ç} = \boxed{y = (c_1\cos x + c_2\sin x)e^{x} - \frac{1}{2}x\cos x\,e^{x}}$

....../....../......

öe! 3 $y'' - 2y' + 2y = x \cdot \cos x\, e^{x} \rightarrow \left.\begin{matrix} k=1 \\ a=1 \end{matrix}\right\} 1+i$

$k^2 - 2k + 2 = 0 \rightarrow k_1 = 1-i$, $k_2 = 1+i$

1 katlı kök

$y_{ö.ç} = y = ((ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x)\, x\, e^{x}$

$y = ((ax^2+bx)\cos x + (cx^2+dx)\sin x)\, e^{x}$

$y' = ((ax^2+bx)\cos x + (cx^2+dx)\sin x)\, e^{x} + e^{x}((2ax+b)\cos x + (-ax^2-bx)\sin x +$
$(2cx+d)\sin x + (cx^2+dx)\cos x)$

$y' = ((ax^2+cx^2+bx+dx+2ax+b)\cos x + (cx^2-ax^2+dx-bx+2cx+d)\sin x)\, e^{x}$

$y'' = [((2ax+2cx+b+d+2a)\cos x + (-ax^2-\cancel{cx^2}-bx-\cancel{dx}-2ax-\cancel{b})\sin x +$
$(2cx-2ax+d-b+2c)\sin x + (cx^2-\cancel{ax^2}+dx-\cancel{bx}+2cx+d)\cos x]\, e^{x} +$
$e^{x}[(\cancel{ax^2}+cx^2+\cancel{bx}+dx+2ax+b)\cos x + (\cancel{cx^2}-ax^2+\cancel{dx}-bx+2cx+d)\sin x)]$

$y'' = [(4ax+4cx+2cx^2+2dx+2b+2d+2a)\cos x + (-2ax^2-2bx+4cx-4ax$
$+2d-2b+2c)\sin x]\, e^{x}$

$[(4\cancel{a}x+4cx+2\cancel{cx^2}+2\cancel{dx}+2\cancel{b}+2d+2a-\cancel{2ax^2}-2\cancel{cx^2}-2\cancel{bx}-2\cancel{dx}-4\cancel{ax}-2\cancel{b}+\cancel{2ax^2}+$
$2\cancel{bx})\cos x + (-2\cancel{ax^2}-2\cancel{bx}+4\cancel{c}x-4ax+2\cancel{d}-2b+2c-2\cancel{cx^2}+2\cancel{ax^2}-2\cancel{dx}+2\cancel{bx}-\cancel{4cx}-2\cancel{d}$
$2\cancel{cx^2}+2\cancel{dx})\sin x]\, \cancel{e^{x}} = \cancel{e^{x}} \cdot x \cdot \cos x$

$[(4cx+2d+2a)\cos x + (-4ax-2b+2c)\sin x] = x \cdot \cos x$

$4cx+2d+2a = x$ $\qquad$ $-4ax-2b+2c=0$

$4c=1$ $\qquad$ $2d+2a=0$ $\qquad$ $a=0$ $\qquad$ $-2b+2c=0$

$c=\frac{1}{4}$ $\qquad$ $a+d=0$ $\qquad$ $b=c$

$d=0$ $\qquad$ $b=\frac{1}{4}$

$$\boxed{y_{g.ç} = y = (c_1 \cdot \cos x + c_2 \sin x)\, e^{x} + \left(\frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x\right) e^{x}}$$

ALIŞTIRMALAR

1-) $y'' - 4y' + 3y = 4e^{2x}$

2-) $4y'' + 4y' + y = 3e^{-x/2}$

3-) $y''' + y'' = x^2 + x + 1 + 3xe^{x}$

4-) $y'' + 9y = (x+1)e^{3x}$

5-) $y'' - y = x \cdot \cos x \, e^{x}$

6-) $y'' - 5y' + 6y = 2\sin x$

7-) $y'' - y = 4e^{2x} \sin x$

8-) $y'' - 6y' + 3y = e^{x} + e^{2x}$

9-) $y''' + y'' + y' + y = xe^{x}$

10-) $y'' + 2y' - 3y = x\cos x + 2\sin x$

Ör: $y'' + y = \underbrace{-\frac{1}{2}\cos 3x}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}\cos x}_{}$ Sonuç $\Rightarrow a = \frac{1}{16}$ $b=0$ $c=0$ $d = 1/4$

3

$k=0$, $a=3$ } $3i$ $\quad$ $k=0$, $a=1$ } i

$k^2 + 1 = 0$ $\rightarrow k = -i$ kök değil
$\rightarrow k = i$ 1 katlı kök

$y_{öz} = y = a\cos 3x + b\sin 3x + cx\cos x + dx\sin x$

Değişken Katsayılı Homogen Olmayan Denklemler.

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x)$$

$$y_{g.ç} = \boxed{y = y_{h.g.ç} + y_{ö.ç}}$$

Ör: $x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x}$

$x = e^t$

$y' = e^{-t}\dot{y}$

$y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$\ddot{y} - \cancel{\dot{y}} + \cancel{\dot{y}} - y = e^{-t}$

$\ddot{y} - y = e^{-t} \rightarrow r = -1$

$k^2 - 1 = 0 \rightarrow k_1 = 1$, $k_2 = -1$ 1 katlı kök

$y_{ö.ç}(t) = y = a t e^{-t}$

$\dot{y} = a e^{-t} - a t e^{-t}$

$\ddot{y} = -2a e^{-t} + a t e^{-t}$

$-2a e^{-t} + \cancel{a t e^{-t}} - \cancel{a t e^{-t}} = e^{-t}$

$-2a = 1$

$\boxed{a = -1/2}$

$t = \ln x$

$y_{g.ç}(t) = y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \frac{1}{2} t e^{-t}$

$$\boxed{y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x}}$$

P.4.

Ör: $x^2y'' + xy' - y = \cos \ln x$

$x = e^t$

$y' = e^{-t} \cdot \dot{y}$

$y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$

$\ddot{y} - \cancel{\dot{y}} + \cancel{\dot{y}} - y = \cos t$

$\ddot{y} - y = \cos t$

$a = 1$, $k = 0$

$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -1$, $k_1 = 1$

$y_{ö.ç}(t) = y(t) = a\cos t + b\sin t$

$\dot{y} = -a\sin t + b\cos t$

$\ddot{y} = -a\cos t - b\sin t$

$-a\cos t - b\sin t - a\cos t - b\sin t \equiv \cos t$

$-2a\cos t - 2b\sin t \equiv \cos t$

$-2a = 1$ $\quad \boxed{b = 0}$

$\boxed{a = -\frac{1}{2}}$

$y_{g.ç} = y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \frac{1}{2}\cos t$

$$\boxed{y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x - \frac{1}{2}\cos \ln x}$$ g.ç.

Ör: $(x-1)^2 y'' + (x-1)y' - y = \sin \ln (x-1)$

$x - 1 = e^t \Rightarrow \ddot{y} - y = \sin t$

ALIŞTIRMALAR

1-) $y'' + 4y = 3x \cdot \cos x$

2-) $y'' + y = \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x$

3-) $y'' - y = 2x \cdot \sin x \cdot e^x$

4-) $y'' - 5y' + 6y = 3\sin 2x$

5-) $y'' - y = 3e^{2x} \cdot \cos x$

6-) $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 1$

7-) $y'' - 6y' + 3y = e^x + e^{2x}$

8-) $y''' + y'' + y' + y = 2xe^x$

9-) $y'' + 3y' + 2y = (x-1)e^x$

10-) $y'' + 2y' - 3y = x \cdot \cos x + 3\sin x$

11-) $y'' - 4y = e^x \cdot \cos x$

Uç Nokta Problemleri, Özdeğerler ve Öz fonksiyonlar

① $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $y(a) = 0$, $y'(a) = 0$ şeklindeki problemleri çözdük.

② $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ şeklinde verilen bir problem için durumu irdeleyerek ① ile ② arasındaki belirgin fark ② denklemi a, b (a<b olsun) gibi farklı iki noktada iki şart içeriyor. ② denkleminde uç noktalarda $y(a) = 0$ $y(b) = 0$ şartlarını sağlayacak şekilde (a, b) aralığında çözüm arıcaz. Bu tip bir problem genelde uç nokta veya sınır değer problemi olarak adlandırılır.

ÖRNEK1 $y'' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ sınır değer problemini çöz.

$y_{g.ç} = y = \underbrace{c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x}_{y(0)=0,\ y(\pi)=0 \text{ için}} \Rightarrow y(0) = c_1 \underbrace{\cos\sqrt{3}\,0}_{\neq 0} + c_2 \underbrace{\sin\sqrt{3}\,0}_{0} = 0$

$\Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$ olmalı

$y(\pi) = c_1 \cdot \underbrace{\cos\sqrt{3}\pi}_{\neq 0} + c_2 \underbrace{\sin\sqrt{3}\pi}_{\neq 0} = 0$

c_1 0 idi

$\Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$ olmalı

$\Rightarrow \boxed{y(x) = 0}$

Verilen şartlar için tek çözüm

$y(x)=0$ çözümünü kabul eden denklemlere aşikar çözüme sahip deniliyor.

Örnek-2: $y''+4y=0$, $y(0)=0$, $y(\pi)=0$

$$\left.\begin{array}{l} y_{g.ç}=y(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x \\ y(0)=0,\ y(\pi)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y(0)=c_1\underbrace{\cos 0}_{\neq 0}+c_2\underbrace{\sin 0}_{0}=0$$

$\boxed{c_1=0}$ olmalı

$y(\pi)=\underset{\substack{\downarrow \\ 0\text{ idi}}}{c_1}\underbrace{\cos 2\pi}_{\neq 0}+c_2\underbrace{\sin 2\pi}_{0}=0$

$\Rightarrow \forall\, c_2$ için sağlanır.

$\Rightarrow \boxed{y(x)=c_2\sin 2x}$

Özdeğer Problemleri:

(3) $y''+p(x)y'+\lambda q(x)y=0$, $y(a)=0$, $y(b)=0$ denklemini λ'ya göre irdeleyelim.

Eğer $\lambda=3$, $p(x)=0$, $q(x)=1$ ise ($a=0$, $b=\pi$ için) yukarıdaki örnek-1, $\lambda=4$ içinde örnek-2 elde edilir. Örnek-1 ve örnek-2 den görüleceği gibi parametre içeren sınır değer problemleri parametrenin özel değerlerine oldukça bağlı olabilir. Genelde de bu böyledir. (3) denkleminde olduğu gibi λ'yı içeren sınır değer problemi bir özdeğer problemi olarak adlandırılır. Özdeğer problemlerinde sorulan soru şudur; hangi λ parametresinin (reel) değeri için bir sınır değer problemi aşikar olmayan (yani sıfırdan farklı) çözüm elde edilir? Bu şekilde bulunan λ parametresine problemin özdeğeri veya karakteristik değeri adı verilir. Bu durumda $\lambda=4$ değeri $y''+\lambda y=0$, $y(0)=0$, $y(\pi)=0$ sınır değer problemının özdeğeridir. Örnek-1'den $\lambda = 3$'ün bu gruptaki özdeğeri olmadığını söyleyebiliriz.

λ_* ③ ile verilen problemin özdeğeri olsun ve λ yerine λ_* değeri koyulduğunda elde edilen y_* problemin aşikar olmayan çözümü olsun yani

$y_*'' + p(x) y_*' + q(x) y_* = 0$, $y_*(a) = 0$, $y_*(b) = 0$ olsun bu durumda y_* değerine λ_*'a karşılık gelen özfonksiyon adı verilir. Örnek-2 de görüldüğü gibi $y_*(x) = \sin 2x$, $(c_1 = 1)$ $\lambda_* = 4$ karşılık gelen öz fonksiyondur.

Daha genel olarak not etmek gerekirse ③ problemi herhangi bir özfonksiyonu bir sabit ile çarpımından elde edilen fonksiyon yerine özfonksiyon olması anlamında homogendir. Diğer bir değişle eğer $y = y_*(x)$ ③'deki problemin $\lambda = \lambda_*$ için sağlıyorsa herhangi bir sabitle çarpılmış $c \cdot y_*$'da sağlar.

ÖRNEK-3

$y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, $(L > 0)$ ile verilen sınır değer probleminin özdeğerlerini ve bunlara karşı gelen özfonksiyonlarını bulalım. Çözüm için λ'nın bütün olası (reel) pozitif, 0, negatif değerlerini göz önüne almalıyız.

Eğer $\lambda = 0$, $y'' = 0 \Rightarrow \underbrace{y(x) = c_1 x + c_2}$ = y.g.ç. olur.

Sınır değerleri uyguladığında $y(0) = 0$, $y(L) = 0$ için

$$\overbrace{\begin{array}{l} y(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0} \\ y(L) = c_1 \cdot \underset{\neq 0}{L} + \underset{0}{c_2} \Rightarrow \boxed{c_1 = 0} \end{array}}$$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = 0}$ olur.

Dolayısıyla $\lambda=0$ verilen problemin özdeğeri değildir,

* Eğer $\lambda<0$ ise $\lambda=-\alpha^2$, $(\alpha>0)$ seçelim bu durumda

$y''-\alpha^2 y'=0$ olur.

$$y_{g.ç}=y(x)=\underbrace{c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x}}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} & \cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \sinh\alpha x=\dfrac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2} & \cosh\alpha x=\dfrac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2} \end{array}\right)$$

$$y_{g.ç}=y(x)=A\cdot\cosh\alpha x+B\sinh\alpha x$$
$$(A=c_1+c_2,\quad B=c_1-c_2)$$

*

$y(0)=0$, $y(L)=0$ için $\Rightarrow y(0)=A\underbrace{\cosh\alpha 0}_{\neq 0}+B\underbrace{\sinh\alpha 0}_{0}=0$

$\Rightarrow \boxed{A=0}$ olmalı

$\Rightarrow y(x)=B\sinh\alpha x$

$\Rightarrow y(L)=0$'dan $y(L)=\underset{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ idi}}}{A}\underbrace{\cosh\alpha L}_{\neq 0}+B\underbrace{\sinh\alpha L}_{\neq 0}=0$

$\boxed{B=0}$ olmalı

böylece $\lambda<0$ için bu problemin tek çözümü $\boxed{y(x)=0}$ dır.

Problemin (α negatif için) negatif özdeğerleri olmadığı söyleyebiliriz.

* $\alpha>0$ olmak üzere $\lambda=\alpha^2>0$ bu durumda denklem

$$\underbrace{y''+\alpha^2y=0}$$

$$y_{g.ç}=y(x)=\underbrace{c_1\cdot\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x}$$

$y(0)=0$, $y(L)=0$ için $\Rightarrow y(0)=c_1\cdot\underbrace{\cos\alpha 0}_{\neq 0}+c_2\underbrace{\sin\alpha 0}_{0}=0$

$\Rightarrow \boxed{c_1=0}$ olmalı

$\Rightarrow y(x)=c_2\cdot\sin\alpha x$

$y(L) = \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ ol.}}}{c_1} \underbrace{\cos\alpha L}_{\neq 0} + \underbrace{c_2 \sin\alpha L}_{} = 0$

$\Rightarrow$ $c_2 \neq 0$ olmak üzere $\sin\alpha L$ sıfır durumları incelenir.

$\underbrace{y(L) = c_2 \cdot \sin\alpha L}$

$c_2 \neq 0$ durumundan $y(L) = c_2 \sin\alpha L = 0$ sağlanır. Sadece αL, π'nin pozitif tam katları olması durumunda sağlanır.

$\alpha L = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots n\pi, \ldots$

Diğer bir ifadeyle $\lambda = \alpha^2 = \frac{\pi^2}{L^2}, \frac{4\pi^2}{L^2}, \frac{9\pi^2}{L^2}, \ldots, \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \ldots$

ise $\longrightarrow$ $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ dizisi için sağlanır.

$c_2 = 1$ olması durumunda, λ_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonu $\boxed{y_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ olur.

Örnek-4: $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(L) = 0$ özdeğerler ve özfonksiyonları bulalım.

$\alpha > 0$, $\lambda = \alpha^2$ alalım

$y'' + \alpha^2 y = 0 \longrightarrow y_{g.ç} = \underbrace{y(x) = c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x}_{y(0) = 0;\ y'(L) = 0 \text{ için}}$

$\Rightarrow y(0) = \underset{\downarrow}{c_1} \cdot \underbrace{\cos\alpha 0}_{\neq 0} + c_2 \underbrace{\sin\alpha 0}_{0} = 0$

$\boxed{c_1 = 0}$ olmalı

$\boxed{y(x) = c_2 \sin\alpha x}$

$y'(x) = -c_1 \alpha \sin\alpha x + c_2 \alpha \cos\alpha x$

$y'(L) = -\underset{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ idi}}}{c_1} \alpha \underbrace{\sin\alpha L}_{\neq 0} + c_2 \alpha \underbrace{\cos\alpha L}_{\neq 0}$

..../..../.... 1

$y'(L) = c_2 \alpha \cos \alpha L = 0$

$\Rightarrow c_2 \neq 0$ ve αL değerleri $\frac{\pi}{2}$'nin pozitif tek tam katları için sağlanır.

Böylece $\alpha L = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots, (2n-1)\frac{\pi}{2}, \ldots$

yani $\lambda = \frac{\pi^2}{4L^2}, \frac{9\pi^2}{4L^2}, \ldots, (2n-1)^2\frac{\pi^2}{4L^2}, \ldots$ kuaca n. özdeğerler

λ_n: ve buna karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla

$$\underbrace{\lambda_n = (2n-1)^2\frac{\pi^2}{4L^2}}_{\text{özdeğerler}}, \quad \underbrace{y_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)x}_{\text{özfonksiyonlar}}, \quad (n = 1,2,3 \ldots)$$

SINAV SORULARININ CEVAPLARI

1-) $a = x''(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, $x_0 = x(0) = 1$, $v_0 = v(0) = -1$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v(t) = 2\sqrt{t+1} + c$$

$$v(0) = 2 + c = -1$$
$$c = -3$$

$v(t) = 2\sqrt{t+1} - 3$

$x(t) = 4/3\,(t+1)^{3/2} - 3t + c_1$; $x(0) = 1$ $\Big\}$ $x(0) = 4/3 + c_1 = 1$, $c_1 = -1/3$

$$\boxed{x(t) = 4/3\,(t+1)^{3/2} - 3t - \frac{1}{3}}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

87,5

..... / ..... / .....

2-) $(y \cdot e^y + y^2 \cos x)dx + (xye^y + y \sin x)dy = 0$

$$\frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{e^y + \cancel{ye^y} + 2y\cos x - \cancel{ye^y} - y\cos x}{-ye^y - y^2\cos x} = \frac{e^y + y\cos x}{-y \cdot (e^y + y\cos x)} = -\frac{1}{y}$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{dy}{y}} = \frac{1}{y}$$

$\Rightarrow$ $(e^y + y\cos x)dx + (xe^y + \sin x)dy = 0$

$$U = \int (e^y + y\cos x)dx + h(y)$$

$$U = xe^y + y\sin x + h(y)$$

$$U_y = \cancel{xe^y} + \cancel{\sin x} + h'(y) = \cancel{xe^y} + \cancel{\sin x}$$

$$h'(y) = 0$$

$$h(y) = c$$

$$\boxed{U = xe^y + y\sin x = c}$$

3-) $x^2 \frac{y'}{\sqrt{y+1}} - x\sqrt{y+1} - \ln x = 0$

$\sqrt{y+1} = u$

$\frac{y'}{2\sqrt{y+1}} = u'$

$\frac{y'}{\sqrt{y+1}} = 2u'$

$x^2 2u' - xu = \ln x$

$u' - \frac{1}{2x}u = \frac{\ln x}{2x^2}$ (lineer)

$\lambda = e^{-1/2\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} y = \int \frac{\ln x}{2x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + c \quad \to x^{5/2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \ln x \, x^{-5/2} + c$$

$u = \ln x$ $\qquad$ $dv = x^{-5/2}dx$

$du = \frac{dx}{x}$ $\qquad$ $v = -\frac{2}{3}x^{-3/2}$

..... / ..... / .....

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}x^{-3/2}\ln x + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x\,x^{-3/2}}\right) + c$$

$$= \boxed{-\frac{1}{3}x^{-3/2}\ln x + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\sqrt{x} + c}$$

4-) $xy'' + 3y' = 0$; $x = e^t$

$$y' = e^{-t}\cdot\dot{y}$$

$$y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$$

$$e^t(e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})) + 3e^{-t}\dot{y} = 0$$

$$x^2y'' + 3xy' = 0 \text{ (Euler)}$$

$$xy'' + 3y' = 0$$

$$\frac{y''}{y'} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \ln y' = -3\ln x + \ln c_1$$

$$y' = \frac{c_1}{x^3} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{c_1}{2x^2} + c_2}$$

5-) $xy' + 6y - 3xy^{4/3} = 0$

$$x\frac{y'}{y^{4/3}} + 6\left(\frac{y}{y^{4/3}}\right) = 3x$$

$$y^{-1/3} = u$$

$$-3u' = \frac{y'}{y^{4/3}}$$

$$-x3u' + 6u = 3x$$

$$u' - \frac{2}{x}u = -1 \text{ (lineer)}$$

$$\lambda = e^{-2\int\frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2}\cdot u = \frac{1}{x^2}y^{-1/3} = -\int\frac{dx}{x^2} + c$$

$$\boxed{\frac{y^{-1/3}}{x^2} = \frac{1}{x} + c}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

SABİTLERİN DEĞİŞİMİ METODU

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \boxed{a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y_1 = f(x)}$$

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

$$a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{(homojen kısım)}$$

$$y_{n.g.ç} = y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \quad \text{olsun} \qquad \left.\begin{array}{l} c_1 = c_1(x) \\ c_2 = c_2(x) \\ c_3 = c_3(x) \end{array}\right\} \text{alalım}$$

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' + c_3 y_3' + \underbrace{c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3}_{0}$$

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_3 y_3'' + \underbrace{c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3'}_{0}$$

$$y''' = c_1 y_1''' + c_2 y_2''' + c_3 y_3''' + \underbrace{c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3''}_{\frac{f(x)}{a_3}}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0 \\ c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = \dfrac{f(x)}{a} \end{array}\right\}$$

c_1', c_2', c_3' bilinmiyor (çöz)

$$\Rightarrow c_1' = \frac{dc_1}{dx} \text{ --- } \Rightarrow \boxed{c_1 = A(x) + \alpha_1}$$

$$c_2' = \frac{dc_2}{dx} = \text{ --- } \Rightarrow \boxed{c_2 = B(x) + \alpha_2}$$

$$c_3' = \frac{dc_3}{dx} = \text{ --- } \Rightarrow \boxed{c_3 = C(x) + \alpha_3}$$

bulursun.

$$y_{n.g.ç} = y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \quad \text{den}$$

$$y_{g.ç} = \boxed{y = y_1(A(x) + \alpha_1) + y_2(B(x) + \alpha_2) + y_3(C(x) + \alpha_3)}$$

Ör: 3 $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

$y'' + y = 0$

$k^2 + 1 = 0 \rightarrow k_1 = -i$, $k_2 = i$

$y_{h.g.ç} = y = \underbrace{c_1 \cos x + c_2 \sin x}$

$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \underbrace{c_1' \cos x + c_2' \sin x}_{0}$

$y'' = \text{-------} + \underbrace{-c_1' \sin x + c_2' \cos x}_{\frac{1}{\sin x}}$

$\sin x \,/\; c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0$

$\cos x \,/\; -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \frac{1}{\sin x}$

$\Rightarrow \quad c_2' (\sin^2 x + \cos^2 x) = \cot x$

$c_2' = \cot x = \frac{dc_2}{dx}$

$\downarrow$

$\boxed{c_2 = \ln|\sin x| + \alpha_2}$

$c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0$

$c_1' = -c_2' \tan x$

$= -\cot x \cdot \tan x$

$c_1' = -1 \rightarrow \boxed{c_1 = -x + \alpha_1}$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$'den

$y_{g.ç} = \boxed{y = (-x + \alpha_1)\cos x + (\ln|\sin x| + \alpha_2)\sin x}$

Ör! 3 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

$y'' - 2y' + y = 0$

$k^2 - 2k + 1 = 0 \quad k_1 = k_2 = 1$

$y_{hpç} = y = (c_1 + c_2 x)e^x = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$y' = c_1 e^x + c_2 e^x(1+x) + \underbrace{c_1' e^x + c_2' x e^x}_{0}$

$y'' = c_1 e^x + c_2 e^x(x+2) + \underbrace{c_1' e^x + c_2' e^x(x+1)}_{\frac{e^x}{x}}$

$-\; c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$

$\underline{c_1' e^x + c_2' e^x(x+1) = \frac{e^x}{x}}$

$c_2' e^x = \frac{e^x}{x}$

$c_2' = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{c_2 = \ln x + \alpha_2}$

$c_1' e^x + c_2' x e^x = 0$

$c_1' = -c_2' x$

$c_1' = -1 \Rightarrow \boxed{c_1 = -x + \alpha_1}$

$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$ 'den

$y_{g.ç} = \boxed{y = (-x + \alpha_1)e^x + (\ln x \cdot x + \alpha_2 \cdot x)e^x}$

ş.ç.

Ör! 3 $y''-3y'+2y=e^{3x}\sin e^{x}$

$k^2-3k+2=0$

$k_1=+1 \quad k_2=+2$

$y_{hgu}=y=c_1e^x+c_2e^{2x}$

$y'=c_1e^x+2c_2e^{2x}+\underbrace{c_1'e^x+c_2'e^{2x}}_{0}$

$y''=c_1e^x+4c_2e^{2x}+\underbrace{c_1'e^x+2c_2'e^{2x}}_{e^{3x}\sin e^{x}}$

$-\,c_1'e^x+c_2'e^{2x}=0$

$c_1'e^x+2c_2'e^{2x}=e^{3x}\sin e^{x}$

$c_2'\cancel{e^{2x}}=\dfrac{e^{\cancel{3x}}}{e^{\cancel{x}}}\sin e^{x}$

$c_2'=e^x\sin e^x \qquad e^x=t$

$\qquad\qquad\qquad\qquad e^x dx=dt$

$c_2=\int e^x\sin e^x\,dx$

$c_2=\int \sin t\,dt$

$\boxed{c_2=-\cos e^x+\alpha_2}$

$c_1'e^x+c_2'e^{2x}=0$ idi

$c_1'e^x=-c_2'e^{2x}$

$c_1'=-c_2'e^x$

$c_1'=-e^x\sin e^x\cdot e^x=-e^{2x}\sin e^x$

$c_1=\int -e^{2x}\sin e^x\,dx \quad\rightarrow\quad e^x=t$

$\qquad\qquad\qquad\qquad e^x dx=dt$

$c_1=-\int t\cdot\sin t\,dt \Rightarrow \boxed{c_1=t\cos t-\sin t+\alpha_1}$

$\boxed{c_1=e^x\cos e^x-\sin e^x+\alpha_1}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

$y_{g.ç} = y = (e^x \cdot \cos e^x - \sin x e^x + \alpha_1) y_1 + (-\cos e^x + \alpha_2) y_2$

Ör: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$

$y_{h.g.ç} = \underbrace{y = c_1 \cdot \cos x + c_2 \sin x}$

$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \underbrace{c_1' \cdot \cos x + c_2' \sin x}_{0}$

$y'' = - - - - - - \underbrace{c_1' \cdot \sin x + c_2' \cos x}_{1/\cos x}$

$$\left.\begin{array}{l} \sin x \,/\; c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ \cos x \,/\; -c_1' \cdot \sin x + c_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x} \end{array}\right) \Rightarrow c_2' = 1$$

$\boxed{c_2 = x + \alpha_2}$

$c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \Rightarrow c_1' = -c_2' \tan x$

$c_1' = -\tan x$

$\boxed{c_1 = \ln|\cos x| + \alpha_1}$

$y_{g.ç} = \boxed{y = \cos x (\ln|\cos x| + \alpha_1) + \sin x (x + \alpha_1)}$

Ör: $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^{2x} + 1}$

$y_{h.g.ç} = \underbrace{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}}$

$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} + \underbrace{c_1' e^{-x} + c_2' e^{-2x}}_{0}$

$y'' = - - - - - - \underbrace{-c_1' e^{-x} - 2c_2' e^{-2x}}_{\frac{1}{e^{2x}+1}}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

$$\left.\begin{aligned} c_1' e^{-x} + c_2' e^{-2x} &= 0 \\ -c_1' e^{-x} - 2c_2' e^{-2x} &= \frac{1}{e^{2x}+1} \end{aligned}\right\} (+) \Rightarrow -c_2' e^{-2x} = -\frac{1}{e^{2x}+1}$$

$$c_2' = \frac{-e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

$$c_2 = -\int \frac{e^x e^x dx}{e^{2x}+1} + \alpha_2 \quad \left(\begin{aligned} e^x &= t \\ e^x dx &= dt \end{aligned}\right)$$

$$= -\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + \alpha_2$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}\ln|t^2+1| + \alpha_2$$

$$\boxed{c_2 = -\frac{1}{2}\ln|e^{2x}+1| + \alpha_2}$$

$$c_1' e^{-x} + c_2' e^{-2x} = 0$$

$$c_1' = -c_2' e^{-x}$$

$$c_1' = \frac{e^{2x} \cdot e^{-x}}{e^{2x}+1} = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$$

$$c_1 = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx + \alpha_1 \quad \left(\begin{aligned} e^x &= t \\ e^x dx &= dt \end{aligned}\right)$$

$$c_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} + \alpha_1$$

$$c_1 = \arctan t + \alpha_1$$

$$\boxed{c_1 = \arctan e^x + \alpha_1}$$

$$y_{g.ç} = \boxed{y = e^{-x}(\arctan e^x + \alpha_1) + e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}\ln|e^{2x}+1| + \alpha_2\right)}$$

Ör: $y''+2y'+y=e^{-x}\ln x$

3 ($y_{hgç}=y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

$y'=-c_1e^{-x}+c_2e^{-x}-c_2xe^{-x}+\underbrace{c_1'e^{-x}+c_2'xe^{-x}}_{0}$

$y''=- - - - - - -c_1'e^{-x}+\underbrace{c_2'e^{x}-c_2'xe^{-x}}_{e^{-x}\ln x}$

$$\left.\begin{aligned} c_1'e^{-x}+c_2'xe^{-x}&=0 \\ -c_1'e^{-x}+c_2'e^{x}-c_2'xe^{-x}&=e^{-x}\ln x \end{aligned}\right) \overset{(+)}{\Rightarrow} c_2'e^{-x}=e^{-x}\ln x$$

$c_2'=\ln x$

$c_2=\int \ln x\,dx+\alpha_2$ $\left(\begin{aligned} u&=\ln x \\ dv&=dx \end{aligned}\right.$

$\boxed{c_2=x\ln x-x+\alpha_2}$

$c_1'e^{-x}+c_2'xe^{-x}=0 \rightarrow c_1'=-c_2'x$

$c_1'=-x\ln x \rightarrow c_1=-\int \ln x\, x\,dx+\alpha_1,$ $\left(\begin{aligned} u&=\ln x \\ du&=\frac{dx}{x} \\ dv&=x\,dx \\ v&=\frac{x^2}{2} \end{aligned}\right)$

$c_1=-\frac{x^2}{2}\ln x+\int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\frac{dx}{\cancel{x}}+\alpha_1$

$\boxed{c_1=-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+\alpha_1}$

$y_{gç}=\boxed{y=e^{-x}\left(-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+\alpha_1\right)+xe^{-x}\left(-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+\alpha_2\right)}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör: $y''' - 3y'' + 3y' - y = \sqrt{x}\,e^x$

3 ( ) $y_{hg} \to y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$

$$y' = c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x + 2c_3xe^x + c_3x^2e^x + \underbrace{c_1'e^x + c_2'xe^x + c_3'x^2e^x}_{0}$$

$$y'' = c_1e^x + 2c_2e^x + c_2xe^x + 2c_3e^x + 4c_3xe^x + c_3x^2e^x + \underbrace{c_1'e^x + c_2'e^x + c_2'xe^x + 2c_3xe^x + c_3'x^2e^x}_{0}$$

$$y''' = - - - - - - - - + \underbrace{c_1'e^x + 2c_2'e^x + c_2'xe^x + 2c_3'e^x + 4c_3'xe^x + c_3'x^2e^x}_{\sqrt{x}e^x}$$

$$\left.\begin{aligned} &c_1'e^x + c_2'xe^x + c_3'x^2e^x = 0 \\ &c_1'e^x + c_2'e^x + c_2'xe^x + 2c_3xe^x + c_3'x^2e^x = 0 \\ &c_1'e^x + 2c_2'e^x + c_2'xe^x + 2c_3'e^x + 4c_3'xe^x + c_3'x^2e^x = \sqrt{x}e^x \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &c_1 \\ &c_2 \\ &c_3 \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1-) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$

2-) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{(x-1)^2}$

3-) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}x^{3/2}$

4-) $y''' + 3y'' + 3y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^3}$

5-) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = \dfrac{e^{-2x}}{x}$

6-) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

Ör: $x^2y'' + xy' + 4y = \frac{1}{\cos 2\ln x}$

$$x = e^t, \quad y' = e^{-t}\dot{y}, \quad y'' = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) \Rightarrow \ddot{y} - \cancel{\dot{y}} + \cancel{\dot{y}} + 4y = \frac{1}{\cos 2t}$$

$$\ddot{y} + 4y = \frac{1}{\cos 2t}$$

$$y_{n.g.ç} = y(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$$

$$\dot{y} = -2c_1\sin 2t + 2c_2\cos 2t + \underbrace{c_1'\cos 2t + c_2'\sin 2t}_{0}$$

$$\ddot{y} = - - - - - - - - 2c_1'\sin 2t + 2c_2'\cos 2t = \frac{1}{\cos 2t}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\sin 2t / \quad & c_1'\cos 2t + c_2'\sin 2t = 0 \\ \cos 2t / \quad & -2c_1'\sin 2t + 2c_2'\cos 2t = \frac{1}{\cos 2t} \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} c_2' = 1 \quad \boxed{c_2 = t + \alpha_2}$$

$$c_1'\cos 2t + c_2'\sin 2t = 0$$

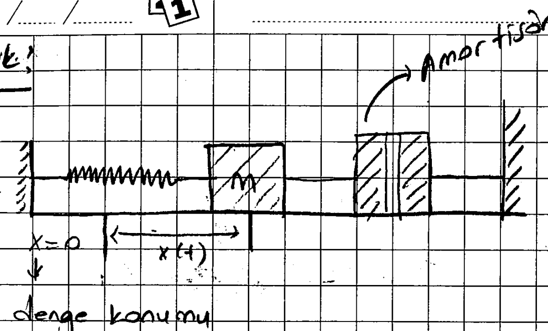
$$c_1' = -c_2'\tan 2t$$

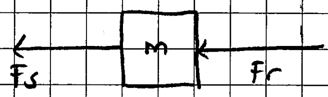
$$c_1' = -\tan 2t \rightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{2}\ln|\cos 2t| + \alpha_1}$$

$$y_{g.ç} = y(t) = \cos 2t\left(\frac{1}{2}\ln|\cos 2t| + \alpha_1\right) + \sin 2t\,(t + \alpha_2)$$

$$y(x) = \cos 2\ln x\left(\frac{1}{2}\ln|\cos 2\ln x| + \alpha_1\right) + \sin 2\ln x\,(\ln x + \alpha_2)$$

Örnek:





$x>0,\ \vartheta>0$

m kütleli bir cisme etki eden kuvvetlerin yönleri

Bir m kütleli cisim kendisine F_s kuvveti uygulayan bir yaya hem de kendisine F_r kuvveti ile etki eden bir amortisöre bağlansın yayın F_s tepki kuvvetinin denge konumundan itibaren kütlenin yer değiştirmesi ile (sağa doğru pozitif, sola doğru negatif yönde) orantılı olduğunu ve amortisörün uyguladığı F_r kuvvetinin kütlenin $\vartheta(t)=\frac{dx}{dt}$ hızı ile orantılı olduğunu varsayalım. İkinci şekil yardımıyla bu iki kuvvetin uygun etki yönünü $F_s=-kx$, $F_r=-c\vartheta$ olarak alabiliriz. Buradaki (−) işaretleri doğrudur. Çünkü x pozitif iken F_s negatif ve ϑ pozitif iken F_r negatiftir. $F_r=-c\vartheta$'ye m'nin hareketine hava ~~direnci~~ içeren sistemdeki sürtünme kuvveti, burada $c>0$ sönüm sabiti, $k>0$ yay sabiti olarak bakabiliriz.

Newton Kanunundan

$m\cdot a=F$'den

$$m\cdot x''=F_s+F_r \quad (1)$$

$$m\cdot x''=-kx-c\vartheta \qquad \vartheta=\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0 \quad (2)$$

Diferansiyel denklemi ortaya çıkar. Böylece m, x(t) konum fonksiyonu tarafından sağlanan bir dif. denklem elde edilir. Bu denklem ikinci mertebeden lineer homojen bir dif. denklemdir. İşte bu denklem kütlenin serbest titreşim hareketini temsil eden matematiksel bir metottur. Fr ve Fs'ye ilaveten eğer m kütlesine bir F(t) dış kuvveti etki ederse bu dış kuvvet (1) deki ifadenin sağ tarafına eklenmelidir. Böylece (2) denklemi şu şeklini alır.

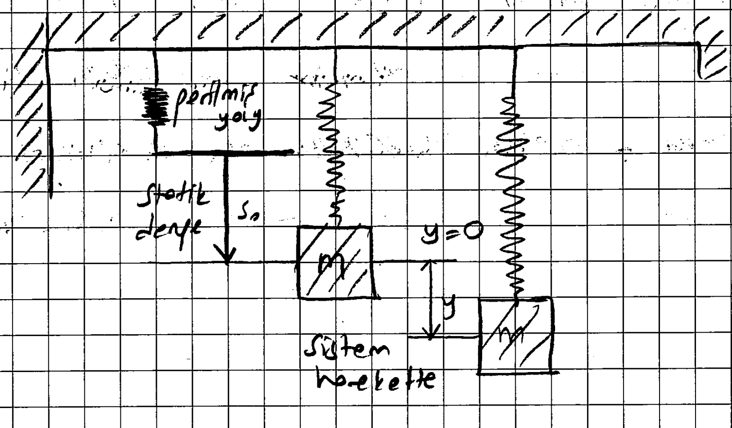
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + k \cdot x = F(t) \quad (3)$$

İşte bu denklem F(t) dış kuvveti etkisindeki bir kütlenin zorlanmış titreşimini temsil eden Şekil 1'deki cismin bulunduğu konum ile denge konumu yayı gerilmemiş durumunda cismin konumu arasındaki uzaklığı x ile gösterir. Yay gerilirken $x>0$, sıkıştırılırken $x<0$ olur.

Hooke kanununa göre yayın kütleye uyguladığı geri çağırılmış Fs kuvveti yayın sıkıştırıldığı veya gerildiği x uzaklığı ile orantılıdır.

$F_s = -kx$, $k>0$ Amortisör yok ise ve bütün sürtünme kuvvetleri ihmal edilirse $c=0$ yazılır ve bu durumda hareket sönümsüz olarak adlandırılır. $c>0$ ise sönümlü hareket denir. Eğer $F(t)=0$ ise harekete serbest hareket $F(t)\neq 0$ ise harekete zorlanmış hareket diyoruz.

Örnek:



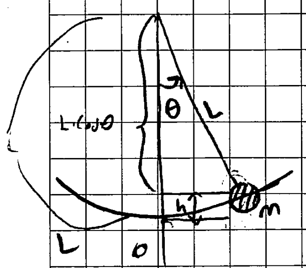
Sabit bir destekten dikey olarak asılan bir yayın ucuna bir kütle bağlayalım. Bu durumda kütlenin $w=mg$, $F_s=-w$, $x=s_0$ olmak üzere $F_s=-kx$ denkleminde tanımlanan s_0 kadar yer değiştirir.

$mg=k.s_0 \rightarrow s_0=mg/k$ bu bize kütlenin statik durağan denge konumunu verir. Eğer y kütle hareketinin yer değişimi olarak tanımlanırsa y'nin

$mx''+cx'+kx=F(t)$ denklemini sağladığı görülür. Eğer özel olarak dış kuvvete sönüm kuvveti eklenirse

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+k.y=F(t) \quad \text{olur.}$$

Örnek: (Basit Sarkaç)



Şekilde görüldüğü gibi L uzunluğunda bir ipin ucuna (daha iyisi kütlesiz bir çubuğa) bağlı ileri geri sallanan bir m kütlesinden oluşan bir basit sarkaç ele alalım. İp ya da çubuğun t zamanında saat yönünün tersine göre dikeyle yaptığı $\theta = \theta(t)$ açısıyla kütlenin konumunu belirleyebiliriz. m kütlesinin hareketini analiz etmek için m kütlesinin potansiyel ve kinetik enerjisinin toplamının sabit olduğunu söyleyen mekanik enerjinin korunumu kanununu uygulayabiliriz. O'dan m'ye kadar olan abirmesel yay boyunca uzaklık $s = L \cdot \theta$ 'dır.

Böylece kütlenin hızı

$$v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt}$$

Kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$ olur. Kütlenin ulaşabildiği en alt noktaya sıfır diyelim. Bu durumda kütlenin V potansiyel enerjisi kütlenin ağırlığı mg ile O'dan daha yukarıda olan kütlenin dikey yüksekliği $h = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$ nın çarpımı olur.

$$V = mgL(1-\cos\theta)$$ 'dır.

T, V'nin toplamı bir C sabiti olma gereği bize

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1-\cos\theta) = C$$ 'yi verir.

↳ t'ye göre türev alırsak

$$mL^2\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + mgL\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Küçük θ'lar için $\sin\theta \cong \theta$ alınır. Eğer ortamın sürtünme direncine karşılık gelen $c \cdot \theta'$ terimide eklenir.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

$$\theta''(t) + c\cdot\theta'(t) + k\cdot\theta(t) = 0, \quad \left(k = \frac{g}{L}\right)$$

Serbest Sönümsüz Hareket

Ne sönümlü ne de dış kuvvet etkisi olan bir yaye bağlı kütleye sahipsek

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

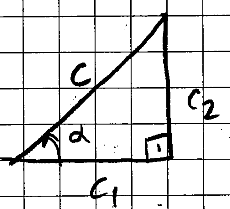
$$mx'' + kx = 0$$

Genellikle $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ alınıp

$mx'' + kx = 0 \longrightarrow \boxed{x'' + w_0^2 x = 0}$ şeklinde yeniden ifade edilir. Bu denklem için genel çözüm

$$\boxed{x(t) = c_1 \cdot \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t}$$ olur.

Bu çözümün açıkladığı hareketi analiz edelim.

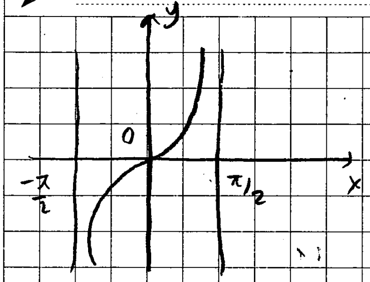


$\underbrace{c}_{\text{genlik}} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\sin\alpha = \frac{c_2}{c}$ $\cos\alpha = \frac{c_1}{c}$

Burada c_1 veya c_2 veya her ikiside negatif olabilirler. Böylece

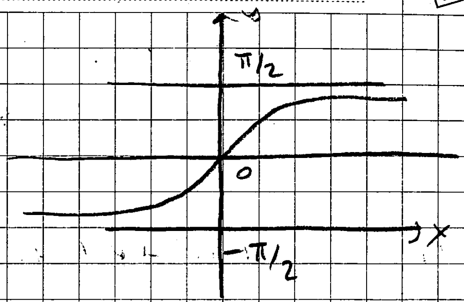
$$\alpha = \begin{cases} \arctan\frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{c_2}{c_1}, & c_1 > 0, c_2 > 0 \text{ (birinci bölge)} \\ \pi + \arctan\frac{c_2}{c_1}, & c_1 < 0, \text{ (ikinci ve üçüncü bölge)} \\ 2\pi + \arctan\frac{c_2}{c_1}, & c_1 > 0, c_2 < 0, \text{ (dördüncü bölge)} \end{cases}$$

Burada $\arctan\frac{c_2}{c_1}$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında hesap makinesiyle ya da bilgisayarla bulunan bir değerdir.



y=tanx

⇔



y=arctan x

Bütün durumlarda $x(t) = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t$

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \sin\alpha = \frac{c_2}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{c_1}{c}$$

den $x(t) = c\left(\underbrace{\frac{c_1}{c}}_{\cos\alpha}\cos w_0 t + \underbrace{\frac{c_2}{c}}_{\sin\alpha}\sin w_0 t\right)$

$$x(t) = c\left(\cos\alpha \cdot \cos w_0 t + \sin\alpha \cdot \sin w_0 t\right)$$

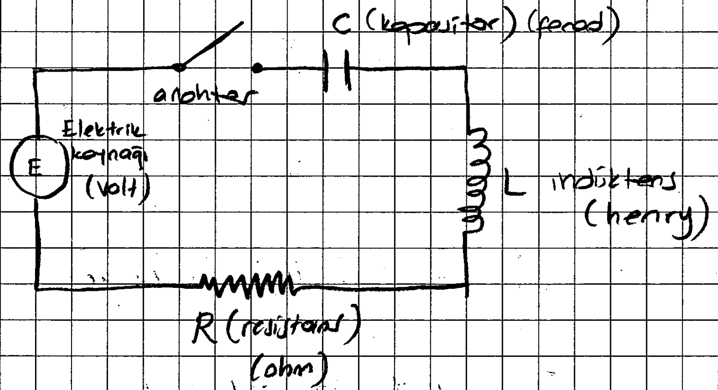
$$\boxed{x(t) = c\cos(w_0 t - \alpha)}$$

Böylece kütle denge konumundan:

1-) Genlik c,

2-) Dairesel frekans w_0 ve

3-) Faz açısı α olmak üzere ileri geri salınım yapar. Bu tip hareketler basit harmonic hareket olarak adlandırılır.



RLC seri devreleri

Böyle bir devre için ana denklem şudur:

$L\frac{dI}{dt}+R\cdot I+\frac{1}{C}Q=E(t)$ denklemi geçerlidir.

$\frac{dQ}{dt}=I(t) \Rightarrow LQ''+R\cdot Q'+\frac{1}{C}Q=E(t)$ ①

Devre elemanı	Voltaj geçişi
İndüktör	$L\frac{dI}{dt}$
Rezistans	$R\cdot I$
Kapasitör	$\frac{1}{C}Q$, Q kolomb

Bu denklemde voltaj $E(t)$'nin bilindiğini kabul ediyoruz. Bir çok pratik problemlerden Q şarjından ziyade I akımı önemli olduğundan ① den Q' yerine $Q'=\frac{dQ}{dt}=I$ yazarsak

$$LI''+RI'+\frac{1}{C}I=E(t)$$

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E'(t)$$

Mekanik Sistem	Elektrik Sistem
kütle	indüksiyon L
sönüm katsayısı c	rezistans R
yay sabiti k	ters kapasitans $\frac{1}{C}$
pozisyon (konum)	şarj elektrik kuvveti Q
kuvvet F	elektrik kuvveti E (veya akımı I)

$$mx''+cx'+kx=F(t) \Longleftrightarrow LI''+RI'+\frac{1}{C}I=E'(t)$$

Sönümsüz Zorlanmış Salınımlar

$F(t) = F_0 . \cos wt$ dış kuvvetin altında sönümsüz zorlanmış harmonic hareketi inceleyelim

$mx'' + cx' + kx = F(t)$ ile verilen denklemde sönümsüz yapısından dolayı $c=0$ konumundan elde edilen

$\boxed{mx'' + kx = F_0 . \cos wt}$ denklemini söz konusu ederiz.

Bu denklemin

dairesel doğal frekans

$$x_{h.g.ç}(t) = x(t) = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t \ , \ \left(w_0 = \sqrt{k/m}\right) \text{ idi.}$$

Öncelikle dış ve doğal frekansların eşit olmadığını varsayalım ($w \neq w_0$ olsun.)

$$x_{ö.ç}(t) = x(t) = a . \cos w_0 t + b \sin w_0 t$$

$$x' = - - -$$

$$x'' = - - - -$$

$$mx'' + kx = F_0 . \cos wt$$

den $a = \dfrac{F_0}{k - mw^2} = \dfrac{F_0/m}{w_0^2 - w^2}$, $b=0$

$\Rightarrow$ genel çözüm: $x(t) = x_{h.g.ç}(t) + x_{ö.ç}(t)$

$$\boxed{x(t) = c_1 . \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t + \frac{F_0/m}{w_0^2 - w^2} \cos wt}$$

veya

$$\boxed{x(t) = C \cos(w_0 t - \alpha) + \frac{F_0/m}{w_0^2 - w^2} \cos wt}$$

Sonuçta elde edilen hareketin doğal dairesel frekansı w_0 ve dış kuvvet frekansı w olan iki salınımın üstüste eklenmesi olduğu görülür.

..../..../.... 1

Ör: $m=1$, $k=9$, $F_0=80$, $w=5$ için

3

$mx''+kx=F_0\cdot\cos wt$ 'den $x''+9x=80\cos 5t$

Bu denklem $x(0)=x'(0)=0$ ise $x(t)=?$

Burada doğal frekans $w_0=\sqrt{k/m}=\sqrt{9/1}=3$ ile dış kuvvetin frekansı eşit olmadığı görülür.

$x(t)_{h.g.ç}=x(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t$

$x_{ö.ç}=x(t)=a\cdot\cos 5t+b\sin 5t$

$x'=---$

$x''=---$

$\boxed{\begin{array}{l}a=-5\\ b=0\end{array}}$

Genel çözüm; $x(t)=x(t)_{h.g.ç}+x(t)_{ö.ç}$

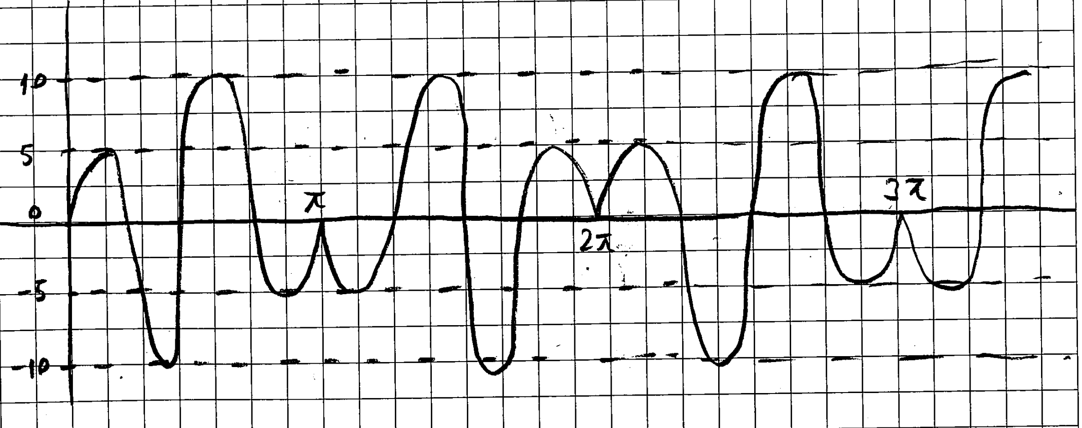
$x(t)=c_1\cdot\cos 3t+c_2\sin 3t-5\cos 5t$

$x'(t)=-3c_1\sin 3t+3c_2\cos 3t+25\sin 5t$

$x(0)=x'(0)=0$ için

$c_1=5$, $c_2=0$

$\Rightarrow \boxed{x(t)=5\cos 3t-5\cos 5t}$



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Laplace Dönüşümleri

Tanım: $f(t)$, $0<t<\infty$ arasında tanımlı parça parça tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun, s $0<s<b$ aralığında bir parametre olmak üzere

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt}$$

ifadesine $f(t)$ fonksiyonunun laplace dönüşümü denir. "$\mathcal{L}$" Laplace operatörü.

$\mathcal{L}$ operatörünün özellikleri ve bazı basit fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

1-) $\mathcal{L}$, lineer dir.

$$\mathcal{L}\left[c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t) \pm \cdots\right] = \mathcal{L}\left[c_1 f_1(t)\right] \pm \mathcal{L}\left[c_2 f_2(t)\right] \pm \cdots$$
$$= c_1 \mathcal{L}\left[f_1(t)\right] \pm c_2 \mathcal{L}\left[f_2(t)\right] \pm \cdots$$
$$= c_1 F_1(s) \pm c_2 F_2(s) + \cdots$$

2-) $\mathcal{L}[k] = \dfrac{k}{s}$, $k \in R$

$$\mathcal{L}\left[3/2\right] = \frac{3/2}{s}, \quad \mathcal{L}[4] = 4\mathcal{L}[1] = 4/s$$

3-) $\mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \dfrac{1}{s-a}$, $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\left[e^{2t}\right] = \frac{1}{s-2}, \quad \mathcal{L}\left[e^{-\ln x}\right] = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

4-) $\mathcal{L}\left[\sin at\right] = \dfrac{a}{s^2+a^2}$

$$\mathcal{L}\left[\sin \tfrac{3}{2} t\right] = \frac{3/2}{s^2+\frac{9}{4}}$$

5-) $\mathcal{L}[\cos at] = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

$$\mathcal{L}\left[\cos \frac{x}{2}\right] = \frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}$$

6-) $\mathcal{L}[\sin^2 at] = \mathcal{L}\left[\dfrac{1-\cos 2at}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}[1] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2at]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4a^2}$$

7-) $\mathcal{L}[\cos^2 at] = \mathcal{L}\left[\dfrac{1+\cos 2at}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}[1] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2at]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4a^2}$$

8-) $\mathcal{L}[\operatorname{sh} at] = \mathcal{L}\left[\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{at}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-at}]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+a}$$

$$= \frac{a}{s^2-a^2}$$

9-) $\mathcal{L}[\operatorname{ch} at] = \mathcal{L}\left[\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{at}] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-at}]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a}$$

$$= \frac{s}{s^2-a^2}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

10-) $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}} = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt$

Ör: $\mathcal{L}[t^3] = \dfrac{3!}{s^4}$

11-) $f(t)$, n. mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun ve $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}[y'] = sY(s) - y(0), \quad \left(\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)\right),$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$

$$\mathcal{L}[y'''] = s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s\,y'(0) - y''(0)$$

12-) $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $a \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = F(s-a)$

Ör: $\mathcal{L}[e^{2t} \cdot \underbrace{\cos t}_{f(t)}] = ?$

$\mathcal{L}[\cos t] = \dfrac{s}{s^2+1} = F(s)$

$\Rightarrow \mathcal{L}[e^{2t} \cos t] = \dfrac{s-2}{(s-2)^2+1}$

13-) $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\left(F(s)\right)$

Ör: $\mathcal{L}[t \sin 2t] = ?$

$$\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4} = F(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[t \sin 2t] = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

$$= \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

Ör: $\mathcal{L}[\underbrace{x^2}_{t^2} \underbrace{e^{-3x}}_{f(t)}] = ?$, $\mathcal{L}[e^{-3x}] = \frac{1}{s+3} = F(s)$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[x^2 e^{-3x}] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^n}\left(\frac{1}{s+3}\right)$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+3)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{(s+3)^3}$$

Gamma Fonksiyonu

__Tanım:__ $x>0$, $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ $x>0$ için bu integral yakınsak-tır. Bu integralin sonucu x'in bir fonksiyonudur.

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt}$$

Gamma fonksiyonu için

1-) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

2-) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $(x \in \mathbb{R}$ için$)$, $\Gamma(3/2) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2)$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$\Gamma(n+1) = n!$ $(n \in \mathbb{N}$ için$)$, $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2! = 2$

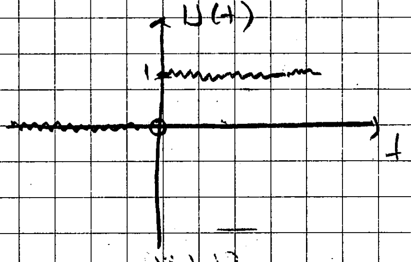
$\Gamma(7) = \Gamma(6+1) = 6!$

14-) $x>0$ için $\mathcal{L}[t^x] = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$, $(x \in \mathbb{R})$

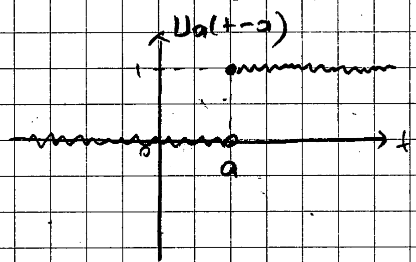
$$\mathcal{L}[t^{1/2}] = \frac{\Gamma(1/2+1)}{s^{1/2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{s^{3/2}}$$

Birim Basamak Fonksiyonu

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



$$U_a(t-a) = \begin{cases} 0, & t<a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$



Birim basamak fonksiyonunun a kadar ötelenmişi

15-) $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}[U_a(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$

16-) $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $a>0$ için

$$\mathcal{L}[U_a(t) \cdot f(t-a)] = e^{-as} \cdot F(s)$$

Ör:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0<t<4 \\ 5, & t \geq 4 \end{cases} , \quad \mathcal{L}[f(t)] = ?$$

$u = t \Rightarrow du = dt$
$dv = e^{-st}dt \Rightarrow v = -\frac{1}{s} e^{-st}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^4 e^{-st} t \, dt + \int_4^\infty e^{-st} 5 \, dt = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, dt$$

$$= -\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^4 + \frac{1}{s} \int_0^4 e^{-st} dt - \frac{5}{s} e^{-st} \Big|_4^\infty$$

$$= -\frac{4}{s}e^{-4s} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^4 - \frac{5}{s}\left(e^{-\cancel{4}s}-e^{-4s}\right)$$

$$= -\cancel{\frac{4}{s}e^{-4s}} - \frac{1}{s^2}e^{-4s} + \frac{1}{s^2} + \cancel{\frac{5}{s}e^{-4s}}$$

$$= \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{1}{s^2}e^{-4s} + \frac{1}{s^2}$$

Konvolüsyon Teoremi

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \quad \mathcal{L}[g(t)] = G(s)$$

$$\Rightarrow F(s)\cdot G(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t g(\tau)\cdot f(t-\tau)\,d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\right]$$

17-) $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(\tau)\,d\tau$

Ör: $\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right] = ?$ $\quad f(t) = 1-\cos t$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[1-\cos t] = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = F(s) \rightarrow F(\tau) = \frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{\tau^2+1}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1-\cos t}{t}\right] = \int_s^\infty \left(\frac{1}{\tau} - \frac{\tau}{\tau^2+1}\right)d\tau$$

$$= \ln\tau - \frac{1}{2}\ln(\tau^2+1)\Big|_s^\infty$$

$$= \ln\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2+1}}\Big|_s^\infty = \ln\frac{\infty}{\sqrt{\infty^2+1}} - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(\ln\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right) - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right) - \ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{0}$$

$$= -\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \boxed{\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}}$$

18-) $\mathcal{L}\left[t^{-1/2}\right] = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{1/2}$

19-) $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Ters Laplace Dönüşümleri

$f(t)$ belli iken $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ yi bulduk

$F(s)$ belli iken $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ yi bulma işlemine

Ters laplace dönüşümü denir.

"$\mathcal{L}^{-1}$" → Ters laplace operatörü olsun.

1-) $\mathcal{L}^{-1}$ lineerdir.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[c_1F_1(s) \pm c_2F_2(s) \pm \dots\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[c_1F_1(s)\right] \pm \mathcal{L}^{-1}\left[c_2F_2(s)\right] \pm \dots$$

$$= c_1\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)\right] \pm c_2\mathcal{L}^{-1}\left[F_2(s)\right] \pm \dots$$

$$= c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t) \pm \dots$$

......./......./...........

2-) $\mathcal{L}^{-1}\left[k/s\right]=k,\ \mathcal{L}^{-1}\left[1/s\right]=1$

3-) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$

4-) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]=\sin at$

5-) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at$

6-) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right]=\operatorname{sh} at$

7-) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right]=\operatorname{ch} at$

8-) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n+1}}\right]=\frac{t^n}{n!},\ \left(n!=\Gamma(n+1)\right)$

9-) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{x+1}}\right]=\frac{t^x}{\Gamma(x+1)} \leftrightarrow \left(\mathcal{L}\left[t^x\right]=\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}\ \text{idi}\right)$

⋮

ör: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3-2s}{4s^2+1}\right]=3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4s^2+1}\right]-2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{4s^2+1}\right]$

$=\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+(\frac{1}{2})^2}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(\frac{1}{2})^2}\right]$

$=\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/2}{s^2+(\frac{1}{2})^2}\right]-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}t$

$=\underbrace{\frac{3}{2}\sin 1/2\,t-\frac{1}{2}\cos 1/2\,t}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör: 3

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\sqrt{s}-2)^3}{s^4}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{3/2}-6s+12s^{1/2}-8}{s^4}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{5/2}}\right]-6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]+12\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{7/2}}\right]-8\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{3/2+1}}\right]-6\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{2+1}}\right]+12\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{5/2+1}}\right]-8\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{3+1}}\right]$$

$$=\frac{t^{3/2}}{\Gamma(3/2+1)}-6\frac{t^2}{\Gamma(2+1)}+12\frac{t^{5/2}}{\Gamma(\frac{5}{2}+1)}-8\frac{t^3}{\Gamma(3+1)}$$

$$=\frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}-3t^2+\frac{32t^{5/2}}{5\sqrt{\pi}}-\frac{4}{3}t^3$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(2+1)=2!$$

$$\Gamma(3+1)=3!$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2-s-2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{(s+1)(s-2)}\right],\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{s+4}{(s+1)(s-2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}\\&s+4=A(s-2)+B(s+1)\\&A+B=1\\&-2A+B=4\\&3A=-3\\&A=-1\quad B=2\end{aligned}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s-2}\right]$$

$$=-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

$$=\underbrace{-e^{-t}+2e^{2t}}$$

Ör:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right],\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{s(s-1)}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s-1}\\&1=a(s-1)+bs\\&a+b=0\\&-a=1\\&b=1\end{aligned}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$=\underbrace{-1+e^{t}}$$

$$\boxed{\frac{s+5}{s^2(s+1)^3(s^2+1)^2}=\frac{a}{s}+\frac{b}{s^2}+\frac{c}{s+1}+\frac{d}{(s+1)^2}+\frac{e}{(s+1)^3}+\frac{fs+g}{(s^2+1)}+\frac{hs+k}{(s^2+1)^2}}$$

(Metod)

$$F(s)=\frac{g(s)}{(s-a)^n(s+b)^m\cdots}\quad \text{için}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)=\lim_{s\to a}\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[(s-a)^n e^{st}F(s)\right]+$$

her bir çarpanı sıfır yapan değere giderken

$$+\lim_{s\to -b}\frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(s+b)^m e^{st}F(s)\right]+\cdots$$

ne kadar çarpan varsa kural aynen devam eder

Ör:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] = \lim_{s\to 3}\frac{1}{(1-1)!}\frac{d^{1-1}}{ds^{1-1}}\left[\cancel{s-3}\, e^{st}\frac{1}{\cancel{s-3}}\right]$$

$$= \lim_{s\to 3} e^{st} = e^{3t}$$

Ör:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2}\right] = \lim_{s\to 3}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left[\cancel{(s-3)^2}\, e^{st}\frac{1}{\cancel{(s-3)^2}}\right]$$

$$= \lim_{s\to 3}\frac{d}{ds}\left[e^{st}\right] = \lim_{s\to 3} t e^{st} = te^{3t}$$

Ör:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^5}\right] = \lim_{s\to 3}\frac{1}{(5-1)!}\frac{d^{5-1}}{ds^{5-1}}\left[\cancel{(s-3)^5}\, e^{st}\frac{1}{\cancel{(s-3)^5}}\right]$$

$$= \lim_{s\to 3}\frac{1}{4!}\cdot\frac{d^3}{ds^3} te^{st} = \frac{1}{24}\lim_{s\to 3}\frac{d^2}{ds^2} t^2 e^{st}$$

$$= \frac{1}{24}\lim_{s\to 3}\frac{d}{ds} t^3 e^{st} = \frac{1}{24}\lim_{s\to 3} t^4 \cdot e^{st}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{24} t^4 \cdot e^{3t}}$$ pratikler.

Ör:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^{10}}\right] = \frac{1}{9!} t^9 \cdot e^{3t}$$

Ör:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-i)(s+i)}\right] = \lim_{s\to i}\frac{e^{st}}{s+i} + \lim_{s\to -i}\frac{e^{st}}{s-i}$$

$$\left(\begin{aligned} \sin at &= \frac{e^{ait}-e^{-ait}}{2i} \\ \cos at &= \frac{e^{ait}+e^{-ait}}{2}\end{aligned}\right)$$

$$= \frac{e^{it}}{2i} + \frac{e^{-it}}{-2i}$$

$$= \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sin t$$

Ör: 3 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-i)^2(s+i)^2}\right] = \lim_{s \to i} \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{e^{st}}{(s+i)^2}\right) +$

$\lim_{s \to -i} \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{e^{st}}{(s-i)^2}\right)$

$= \dots + \underbrace{ie^{it} - ie^{-it}}_{} + \dots$ gelseydi

bildiklerim cinsinden yazmam gerek

$-2\frac{(e^{it}-e^{-it})}{2i} = -2\sin t$

Diferansiyel Denklemlere Uygulanış

Sabit Katsayılı Denklemlere Uygulanış

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t),\ f(x)$

$f(t) \downarrow y = y(t)$ $\qquad f(x) \downarrow y = y(x)$

- Önce iki tarafın laplace'sı alınır.
- Sonra lineerlik ve laplace hesaplama yapılır
- Sonra verilmişse ilk şartlar kullanılır.
- Sonra $Y(s) = \dots$ (s'li cinsten) bulunur.

$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$

- Sonrada $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\dots]$

$\boxed{y(t) = \dots}$ bulunur.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t),\ f(x)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[0] = 0}$$

$$\mathcal{L}\left[a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$a_n \mathcal{L}[y^{(n)}] + a_{n-1}\mathcal{L}[y^{(n-1)}] + \dots + a_2 \mathcal{L}[y''] + a_1 \mathcal{L}[y'] + a_0 \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$a_n \mathcal{L}[\dots] + \dots + a_2 \mathcal{L}[s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)] + a_1 \mathcal{L}[s Y(s) - y(0)] + a_0 Y(s) = \dots$$

verilen ilk şartlar varsa kullanılır $\Rightarrow Y(s) = \dots$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\dots]$$

$$\boxed{y(t) = \dots}$$

Ör; $y' - 2y = e^{5t}$, $y(0) = 3$

$$\mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{5t}]$$

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_{3} - 2Y(s) = \frac{1}{s-5}$$

$$(s-2)Y(s) = \frac{1}{s-5} + 3$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s-5)} + \frac{3}{s-2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-5)} + \frac{3}{s-2}\right]$$

$$= \lim_{s\to 2}\left(\frac{e^{st}}{s-5}\right) + \lim_{s\to 5}\left(\frac{e^{st}}{s-2}\right) + 3e^{2t}$$

$$= \frac{e^{2t}}{-3} + \frac{e^{5t}}{3} + 3e^{2t}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{8e^{2t}}{3} + \frac{e^{5t}}{3}}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör: $x'' + 2x' + x = 3te^{-t}$ denklemini $x(0)=4,\ x'(0)=2$ şartları altında çözelim.

$$\mathcal{L}[x''] + 2\mathcal{L}[x'] + \mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[3te^{-t}]$$

$$s^2X(s) - s\underset{4}{x(0)} - \underset{2}{x'(0)} + 2\left(sX(s) - \underset{4}{x(0)}\right) + X(s) = 3(-1)^1\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}(F(s))}$$

$$\underbrace{(s^2+2s+1)}_{(s+1)^2}X(s) = \frac{3}{(s+1)^2} + 4s + 2 + 8$$

$$\underbrace{X(s) = \frac{3}{(s+1)^4} + \frac{4s+10}{(s+1)^2}}_{\text{pratikleştir}}$$

$$x(t) = 3\lim_{s\to -1}\frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}(e^{st}) + \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left[(4s+10)e^{st}\right]$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\lim_{s\to -1} t^3e^{st} + \lim_{s\to -1}\left((4s+10)te^{st} + 4e^{st}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}t^3e^{-t} + 6te^{-t} + 4e^{-t}$$

$$x(t) = e^{-t}\left(\frac{t^3}{2} + 6t + 4\right)$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör: 3 $w'' + 2w' + w = x$, $w(0) = -3$, $w(1) = -1$

$$s^2 w(s) - s\underbrace{w(0)}_{-3} - \underbrace{w'(0)}_{c} + 2\left(s w(s) - \underbrace{w(0)}_{-3}\right) + w(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\underbrace{(s^2+2s+1)}_{(s+1)^2} w(s) = \frac{1}{s^2} - 3s + c - 6$$

$$w(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2} + \frac{c-6-3s}{(s+1)^2}$$

$$w(x) = \lim_{s\to 0} \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{sx}}{(s+1)^2}\right) + \lim_{s\to -1}\left(\frac{e^{sx}}{s^2}\right) + \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds}\left(e^{sx}(c-6-3s)\right)$$

$$w(x) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{x e^{sx}(s+1)^2 - 2(s+1)e^{sx}}{(s+1)^4}\right) + \lim_{s\to -1}\left(\frac{x \cdot e^{sx} \cdot s^2 - 2s e^{sx}}{s^4}\right) +$$

$$\lim_{s\to -1}\left[x e^{sx}(c-6-3s) - 3e^{sx}\right]$$

$$w(x) = x - 2 + x e^{-x} + 2e^{-x} + (c-3)e^{-x} - 3e^{-x}$$

$$w(x) = x - 2 + [x + 2 + c - 3 - 3]e^{-x}$$

$$w(x) = x - 2 + [x + c - 4]e^{-x} \rightarrow w(1) = -1 = 1 - 2[1 + c - 4]e^{-1}$$

$$\Rightarrow (c-3)e^{-1} = 0$$

$$e^{-1} \neq 0 , \ c - 3 = 0 \rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{w(x) = x - 2 + (x-1)e^{-x}}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör: 3 $y''-4y=0, \quad y(0)=1, \; y'(0)=2$

$$s^2Y(s)-s\underset{\downarrow\,1}{y(0)}-\underset{\downarrow\,2}{y'(0)}-4Y(s)=0 \quad , \quad (\mathcal{L}[0]=0)$$

$$(s^2-4)Y(s)=s+2$$

$$Y(s)=\frac{s+2}{s^2-4}=\frac{1}{s-2} \Rightarrow \boxed{y(t)=e^{2t}}$$

Ör: 3 $y''+2y'+y=t$ (hiç ilk şart verilmemişse)

$$s^2Y(s)-s\underset{\downarrow\,c_1}{y(0)}-\underset{\downarrow\,c_2}{y'(0)}+2(sY(s)-y(0))+Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\underbrace{(s^2+2s+1)}_{(s+1)^2}Y(s)=\frac{1}{s^2}+c_1s+c_2+2c_1$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2(s+1)^2}+\frac{c_1s+c_2+2c_1}{(s+1)^2}$$

$$y(t)=\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{(s+1)^2}\right]+\lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s^2}\right]+\lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left[(c_1s+c_2+2c_1)e^{st}\right]$$

$$y(t)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{t\cdot e^{st}(s+1)^2-2(s+1)e^{st}}{(s+1)^4}\right)+\lim_{s\to -1}\left(\frac{te^{st}-2se^{st}}{s^4}\right)$$

$$+\lim_{s\to -1}\left(c_1e^{st}+t(c_1s+c_2+2c_1)e^{st}\right)$$

$$y(t)=t-2+te^{-t}+2e^{-t}+c_1e^{-t}+t(c_2+c_1)e^{-t}$$

$$y(t)=t-2+[t+2+c_1+t(c_2+c_1)]e^{-t}$$

$$y(t)=t-2+[c_1+\cancel{t}+2+t(1+c_1+c_2)]e^{-t}$$

Değişken Katsayılılarda Laplace Dönüşümü.

Ör: $y'' + ty' - 2y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[ty'] - 2Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0} + (-1)\frac{d}{ds}\left(sY(s) - y(0)\right) - 2Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\left(\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(F(s)\right), \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)\right)$$

$f(t) \to y'$, $F(s) \to sY(s) - y(0)$, $y' = sY(s) - y(0)$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - Y(s) - s\frac{dY(s)}{ds} - 2Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow -s\frac{dY(s)}{ds} + (s^2 - 3)Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\underbrace{\frac{dY(s)}{ds} + \left(\frac{3}{s} - s\right)Y(s) = -\frac{1}{s^2}}_{\text{lineer}}$$

$$\lambda = e^{\int\left(\frac{3}{s} - s\right)ds} = e^{3\ln s - s^2/2}$$

$$\underbrace{\lambda = s^3 e^{-s^2/2}}$$

$$\Rightarrow s^3 e^{-s^2/2} Y(s) = -\int s^3 e^{-s^2/2}\frac{1}{s^2}\,ds + \overset{=0}{c}$$

0 olmalıydı

$$= -\int s e^{-s^2/2}\,ds + c$$

$$= e^{-s^2/2} + c$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{1}{s^3} + c\,\frac{e^{s^2/2}}{s^3}}$$

..../..../.... 1

Teorem: (c'den dolayı)

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ ise } \lim_{s\to\infty} F(s) = 0 \text{ dır. (olmalı)}$$

Teoreme göre

$$\lim_{s\to\infty} Y(s) = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{1}{s^3} + c\frac{e^{s^2/2}}{s^2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\infty}}_{0} + \underbrace{c\,\frac{\infty}{\infty}}_{!!!} = 0 \text{ (olmalı)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} \text{ kalır } \rightarrow \boxed{y(t) = \frac{t^2}{2}} \text{ p.ç.}$$

Ör: $ty'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

$$\mathcal{L}[ty''] + Y(s) = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{1}\right) + Y(s) = 0$$

$$-2sY(s) - s^2\frac{dY(s)}{ds} + Y(s) = 0$$

$$-s^2\frac{dY(s)}{ds} = (2s-1)Y(s)$$

$$\frac{dY(s)}{ds} = \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right)ds$$

$$\ln Y(s) = -\frac{1}{s} - 2\ln s + \ln c$$

$$Y(s) = \frac{ce^{-1/s}}{s^2}, \quad \text{Teo. göre } \lim_{s\to\infty} Y(s) = \lim_{s\to\infty} c\,\frac{e^{-1/s}}{s^2}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

$$= \frac{c\, e^{-1/\infty}}{\infty} = \frac{c}{\infty} = 0 \text{ olur}$$

$\to 0$ ($\forall c \in \mathbb{R}$ için T.o.o. sağlandı)

$$Y(s) = \frac{c}{s^2} e^{-1/s}$$

her c için teoremin sağlanması durumlarında Y(s) deki üstelli çarpan maklerin serisine açılır. Buna göre işlemler yürütülür.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$Y(s) = \frac{c}{s^2}\left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2!}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!\, s^n} + \cdots\right)$$

$$Y(s) = c\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2!}\frac{1}{s^4} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!\, s^{n+2}} + \cdots\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}$ ile $y(t) = c\left(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!}\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!}\frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n!\,(n+1)!} + \cdots\right)$

$y(0) = 0$ 'dan $y(0) = 0 = c(\cdots) = 0$ ✓

$y'(t) = c\,(1 - t + t^2 + \cdots) \to y'(0) = 1 = c\,(1 + \cdots)$

$$\boxed{c = 1}$$

$$\boxed{y(t) = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!}\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!}\frac{t^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n!\,(n+1)!} + \cdots}$$

..... / ..... / ....

Ör: 3 $\quad xy'' + (3-x)y' - 2y = x-1, \quad y(0)=0, \quad y'(0) = -\frac{1}{3}$

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s) - s\underbrace{Y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{-1/3}\right) + 3\left(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0}\right) + \frac{d}{ds}\left(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0}\right) - 2Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

$$-2sY(s) - s^2\frac{dY(s)}{ds} + 3sY(s) + Y(s) + s\frac{dY(s)}{ds} - 2Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

$$s(1-\cancel{s})\frac{dY(s)}{ds} - (1-\cancel{s})Y(s) = \frac{1-\cancel{s}}{s^2}$$

$$\underbrace{\frac{dY(s)}{ds} - \frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s^3}}_{\text{lineer}}$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{ds}{s}} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s}Y(s) = \int \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^3}\,ds + c$$

$$\frac{1}{s}Y(s) = -\frac{1}{3}\frac{1}{s^3} + c$$

$$\underbrace{Y(s) = -\frac{1}{3}\frac{1}{s^2} + cs}$$

Teo. göre

$$\lim_{s\to\infty} Y(s) = \lim_{s\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{s^2} + cs\right) = 0 \text{ olmalı}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\infty}}_{0} + \underset{!!!}{c\infty} = 0 \text{ olmalı}$$

$c=0$ olmalıydı

$$Y(s) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s^2} \rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{x}{3}}$$

Ör: 3 $y'' + 3xy' - 6y = 2, \quad y(0) = y'(0) = 0$

Ör: 3 Değişken her iki katsayıda olsun

$ty'' + 2y' + ty = 0, \quad y(0_+) = 1, \; y(\pi) = 0$

$$-\frac{d}{ds}\Big(s^2Y(s) - s\underset{1}{y(0)} - \underset{c}{y'(0)}\Big) + 2\big(sY(s) - \underset{1}{y(0)}\big) - \frac{d}{ds}\big(Y(s)\big) = 0$$

$$-2s\cancel{Y(s)} - s^2\frac{dY(s)}{ds} + 1 + 2s\cancel{Y(s)} - 2 - \frac{dY(s)}{ds} = 0$$

$$-(s^2+1)\frac{dY(s)}{ds} = 1$$

$$dY(s) = -\frac{1}{s^2+1}$$

$$\underbrace{Y(s) = -\arctan s + c}$$

Teo. göre

$$\lim_{s\to\infty} Y(s) = \lim_{s\to\infty}\big(c - \underbrace{\arctan\infty}_{\frac{\pi}{2}}\big) = 0 \text{ olmalı}$$

$$= c = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

$$\boxed{Y(s) = \arctan\frac{1}{s}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big[\underbrace{\arctan\frac{1}{s}}_{?}\Big]$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{1}{\tau^2+1}\,d\tau$$

$$= \arctan\tau \Big|_s^\infty$$

$$= \arctan\infty - \arctan s$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan\frac{1}{s}$$

$$, f(t) = \sin t \rightarrow \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$$

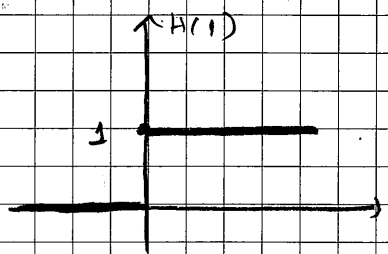
$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty f(\tau)\,d\tau$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

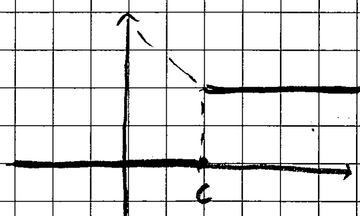
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\arctan\frac{1}{s}\right] = y(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$H(t)$: (Heaviside fonk)

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



c: sbt $\quad H(t-c) = \begin{cases} 1, & t \geq c \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$

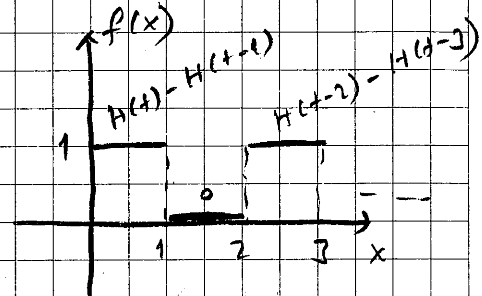


$$H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases}$$

$a < b$

	a		b
$H(t-a)$	0	1	1
$H(t-b)$	0	0	1
$H(t-a)-H(t-b)$	0	1	0

$H(t)$'nın kullanımı



Ör: $y''+y=f(x)$, $f(x)$ grafiği

$f(t)$ fonks. $H(t)$'lye bağlı yazılabilir.

$$f(t)=H(t)-H(t-1)+H(t-2)-H(t-3)+\dots$$

$$* \mathcal{L}[H(t-c)]=\int_0^\infty e^{-st}\cdot H(t-c)\,dt=\int_c^\infty e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_c^\infty$$

$$\left[\cancel{\int_0^c}+\int_c^\infty\right]$$

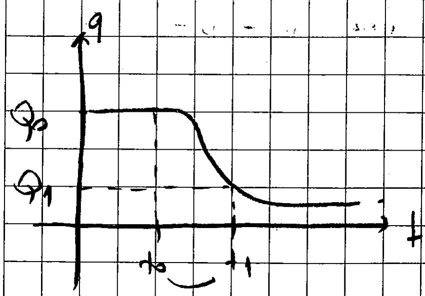
$$=\frac{1}{s}e^{-sc}$$

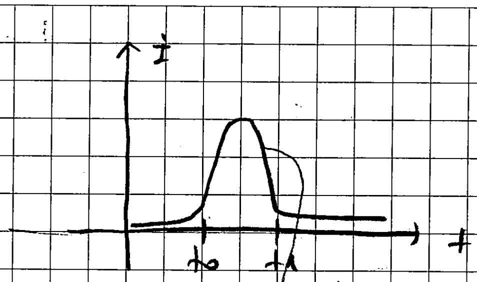
Özel olarak $c=0$ için $\mathcal{L}[H(t)]=\frac{1}{s}$

$\mathcal{L}[e^{ct}\cdot f(t)]=F(s-c)$ (1. öteleme özelliği)

$\left\{\mathcal{L}[f(t-c)H(t-c)]=e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)]\right\}$ (2. öteleme özelliği)

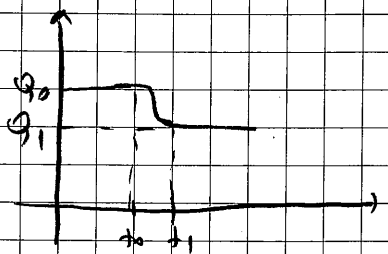
Sonuç: $f(t-c)\cdot H(t-c)=\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}\mathcal{L}[f(t)]\right]$

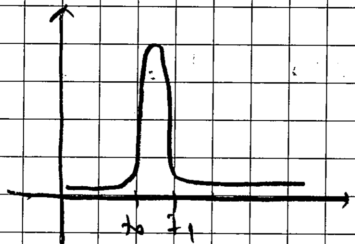


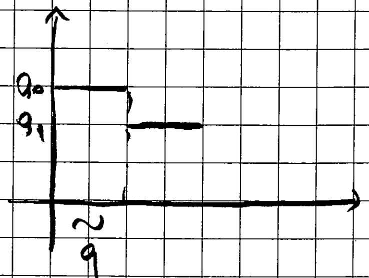


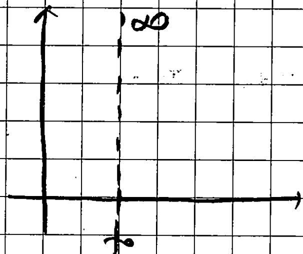
(akım)

bu aralık ne kadar yaklaşırsa → küresi yükselir,









$$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dq}{dt} \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} i(t)\,dt$$

Akım $[t_0, t_1]$ dışında sıfır olduğundan aralığı $= \int_{-\infty}^{\infty} i(t)\,dt$

limit durumunda

$$\tilde{q}(t) = Q_0 - [Q_0 - Q_1]\, H(t - t_0)$$

$$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{i}(t)\,dt$$

Tanım: $\delta(t)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1-) $\delta(t) = 0$, $t \neq 0$ ise

2-) $\delta(0)$ tanımsız

3-) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$

4-) $p(t)$, $(-\infty, \infty)$ de sürekli olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cdot \delta(t)\,dt = p(0)$$

5-) $\delta(t-a) = 0$, $t \neq a$ için

6-) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\,dt = 1$

7-) $g(t)$, sürekli olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \delta(t-a)\,dt = g(a)$$

Bu özelliklerin sonucunda

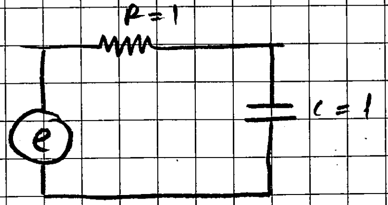
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,dt = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad H(t)$$

Buradan $\delta(t)$ bir anlamda $H(t)$'nin türevi olarak düşünülebilir.

* $\mathcal{L}[\delta(t-a)] = \int_{0}^{\infty} e^{-st} \cdot \delta(t-a)\,dt = e^{-as}$

...../...../.........

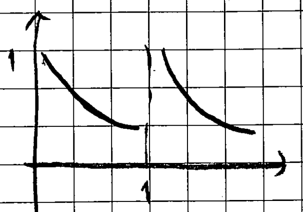
ÖR: $y' + y = \delta(t-1)\,, \quad y(0) = 1$



$$\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\delta(t-1)]$$

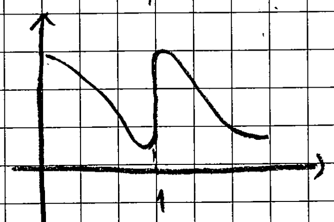
$$s\,y(s) - y(0) + y(s) = e^{-s}$$

$$y(s) = \frac{e^{-s}}{s+1} + \frac{1}{s+1}$$



her iki tarafa $\mathcal{L}^{-1}$ uygulanırsa

$$y(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]}_{e^{-t}} + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s+1}\right]$$



$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-cs}\,\mathcal{L}[f(t)]\right]$$

$$= f(t-1)\,H(t-1)$$

$c = 1\,, \quad \mathcal{L}[f(t)] = \dfrac{1}{s+1}$

$$f(t) = e^{-t}$$

$$\Rightarrow \; e^{-(t-1)}\,H(t-1)$$

$$y(t) = e^{-t} + e^{-(t-1)}\,H(t-1)$$

		$t=1$
e^{-t}	e^{-t}	e^{-t}
$e^{-(t-1)}H(t-1)$	0	$e^{-(t-1)}$
$y(t)$	e^{-t}	$e^{-t} + e^{-(t-1)}$

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t}\,, & t < 1 \\ e^{-t} + e^{-(t-1)}\,, & t \geq 1 \end{cases}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

ALIŞTIRMALAR

(1) $y' + 8y = \delta(t-1) + \delta(t-2)$, $y(0)=0$

(2) $y'' + 4y' + 3y = 1 + \delta(t-3)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$

(3) $y'' + 4y = t + 4 + \delta(t-4\pi)$, $y(0)=y'(0)=1$

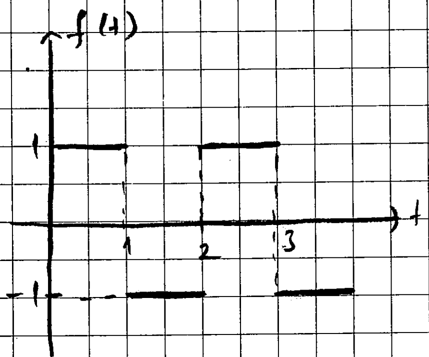
(4) $\delta^{(n)}(t)$, $n \geq 0$, n tane aşağıdaki öz. sahip olun.

1-) $\delta^{(n)}(t) = 0$, $t \neq 0$

2-) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-a)\, g(t)\, dt = (-1)^n g^{(n)}(a)$, g sürekli

$$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t-a)] = e^{-as} s^n$$

Ör: $y'' + 4y = f(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$



$$f(t) = H(t) - H(t-1) - H(t-1) + H(t-2) + H(t-2) - H(t-3) - - - -$$

$$f(t) = H(t) - 2H(t-1) + 2H(t-2) - 2H(t-3)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + 2\frac{e^{-2s}}{s} - \cdots = \frac{1}{s} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+1)s}(-1)^n}{s}$$

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0} + 4Y(s) = \frac{1}{s} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+1)s}(-1)^n}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(n+1)s}(-1)^n}{(s^2+4)s}$$

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

$$As^2 + 4A + Bs^2 + Cs = 1$$

$A + B = 0$ $\quad C = 0$

$4A = 1$

$A = \frac{1}{4}$ $\quad B = -\frac{1}{4}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{4(s^2+4)}\right] - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{4s} - \frac{s}{4(s^2+4)}\right)e^{-(n+1)s}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2(t-(n+1))\right]H(t-(n+1))$$

Ör: 3

$$y'' + y = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}, \quad y(0)=0,\ y'(0)=0$$

$$s^2 y(s) - s\underset{0}{y(0)} - \underset{0}{y'(0)} + y(s) = \int_0^1 e^{-st}\,2\,dt + 0$$

$$= -\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{2}{s}e^{-s} + \frac{2}{s}$$

$$(s^2+1)\,y(s) = -\frac{2}{s}e^{-s} + \frac{2}{s}$$

$$y(s) = \frac{-2e^{-s}}{s(s^2+1)} + \frac{2}{s(s^2+1)}$$

$$\frac{2}{s(s^2+1)} = \frac{a}{s}_{(s^2+1)} + \frac{bs+c}{s^2+1}_{(s)}$$

$$2 \equiv (a+b)s^2 + cs + a$$

$$a = 2,\ b = -2,\ c = 0$$

$$y(t) = -2\lim_{s\to 0}\frac{e^{-s}e^{st}}{s^2+1} - 2\lim_{s\to i}\frac{e^{-s}e^{st}}{s(s+i)} - 2\lim_{s\to -i}\frac{e^{-s}e^{st}}{s(s-i)}$$

$$+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+1}\right] \to 2 - 2\cos t$$

$$y(t) = -\cancel{2} \underbrace{- 2\frac{e^{-i}e^{+it}}{-2} - 2\frac{e^{i}e^{-it}}{-2}}_{+2\left(\frac{e^{i(1-t)} + e^{-i(1-t)}}{2}\right)} + \cancel{2} - 2\cos t$$

$$\frac{e^{i(1-t)} + e^{-i(1-t)}}{2} = \cos(1-t)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 2\cos(1-t) - 2\cos t}$$

Ör! 3

$$y''+4y=\begin{cases}0, & 0<t<2\\ 1, & t\geq 2\end{cases},\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

$$\underbrace{s^2Y(s)-s\underset{0}{y(0)}-\underset{1}{y'(0)}+4Y(s)}_{(s^2+4)Y(s)-1}=0+\int_2^{\infty}e^{-st}\,1\,dt$$

$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_2^{\infty}$$

$$=\frac{1}{s}e^{-2s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2+4}+\frac{e^{-2s}}{s(s^2+4)}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\lim_{s\to 0}\frac{e^{-2s}e^{st}}{s^2+4}+\lim_{s\to 2i}\frac{e^{-2s}e^{st}}{s(s+2i)}+\lim_{s\to -2i}\frac{e^{-2s}e^{st}}{s(s-2i)}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}+\frac{e^{-4i}e^{2it}}{-8}+\frac{e^{4i}e^{-2it}}{-8}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Big(\underbrace{\frac{e^{i(4-2t)}+e^{-i(4-2t)}}{2}}_{\cos(4-2t)}\Big)$$

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(4-2t)}$$

ALIŞTIRMALAR

1-) $$x''+4x=\begin{cases}\cos 2t, & 0<t\leq 2\pi\\ 0, & t\geq 2\pi\end{cases}$$

2-) $$y''+4y=\begin{cases}1, & 0<t<1\\ 0, & t\geq 1\end{cases},\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

3-) $y'' + 4y = \begin{cases} 4t, & 0 \le t < 1 \\ 4, & t \ge 1 \end{cases}$

4-) $f(t) = \begin{cases} e^t, & 0 \le t < 2\pi \\ e^t + \cos t, & t \ge 2\pi \end{cases}$ $\quad \mathcal{L}[f(t)] = ?$

1-) $t y'' + t y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$

2-) $t y'' + (1-2t) y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2$

3-) $t y'' - t y' - y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 3$

İntegral Denklemlerine Uygulanış

Ör: $y' + 2y - 3\int_0^t y\,dt = 5t + 5, \quad y(0) = 2$

$$s y(s) - \underbrace{y(0)}_{2} + 2y(s) - 3\underbrace{\mathcal{L}\left[\int_0^t y\,dt\right]}_{\frac{y(s)}{s}} = \frac{5}{s^2} + \frac{5}{s},$$

$$\left(\mathcal{L}[F(t)] = f(s) \text{ ise} \quad \mathcal{L}\left[\int_0^t F(t)\,dt\right] = \frac{f(s)}{s} \right.$$

$$s^2 y(s) - 2s + 2s\,y(s) - 3y(s) = \frac{5}{s} + 5$$

$$\underbrace{(s^2 + 2s - 3)}_{(s-1)(s+3)} y(s) = 2s + \frac{5}{s} + 5$$

$$y(s) = \frac{2s}{(s-1)(s+3)} + \frac{5}{s(s-1)(s+3)} + \frac{5}{(s-1)(s+3)}$$

$$y(t) = 2\lim_{s\to 1} \frac{s e^{st}}{s+3} + 2\lim_{s\to -3} \frac{s e^{st}}{(s-1)} + 5\lim_{s\to 0} \frac{e^{st}}{(s-1)(s+3)} + 5\lim_{s\to 1} \frac{e^{st}}{s(s+3)} + 5\lim_{s\to -3} \frac{e^{st}}{s(s-1)}$$

$$+ 5\lim_{s\to 1} \frac{e^{st}}{(s+3)} + 5\lim_{s\to -3} \frac{e^{st}}{(s-1)}$$

$$y(t) = 2\frac{e^t}{4} + 2\frac{-3e^{-3t}}{-4} + \frac{5}{-3} + \frac{5e^t}{4} + \frac{5e^{-3t}}{12} + \frac{5e^t}{4} + \frac{5e^{-3t}}{-4}$$

$$y(t) = \frac{e^t}{2} + \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{5}{3} + \frac{5}{2}e^t + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{5}{4}e^{-3t}$$

$$\boxed{y(t) = 3e^t + \frac{2}{3}e^{-3t} - \frac{5}{3}}$$

DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

$D^n = \dfrac{d^n}{dt^n}$, türev operatörü

$$D^2 f(t) = \frac{d^2}{dt^2}(f(t)) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$$

$f(t)\,D^n$??? anlamsız $\qquad$ $2D^n \Rightarrow$ duruma göre anlamlı

$D^n f(t)$ ✓ $\qquad$ $D^n(2)$

$x = x(t)$
$y = y(t)$
$z = z(t)$
⋮

} bilinmeyenler (bağımlı değişkenler)
t, bağımsız değişken olsun

$$L_1(D)x + L_2(D)y + L_3(D)z = f_1(t)$$
$$M_1(D)x + M_2(D)y + M_3(D)z = f_2(t)$$
$$N_1(D)x + N_2(D)y + N_3(D)z = f_3(t)$$

} dif. denk. sistemi

($L_i(D), M_i(D), N_i(D)$ $1 \leq i \leq 3$ D'nin polinomlarıdır.)

....../....../.......... 1

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix}$$

Bu determinant açılırken D'ler sayı imiş gibi hesaba ~~katılır~~.

(Açılımı D'li cinsten bir ifade (polinom))

NOT!: Bu polinomun derecesi sistemin mertebesini belirler. Mertebe sistemin çözümünde ~~kaç~~ tane ~~sabit~~ kullanacağımızı belirler.

Cramer'e göre

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & L_2 & L_3 \\ f_2 & M_2 & M_3 \\ f_3 & N_2 & N_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\Delta x(t) = \begin{vmatrix} f_1 & L_2 & L_3 \\ f_2 & M_2 & M_3 \\ f_3 & N_2 & N_3 \end{vmatrix}$$

Bu determinant açılırken D operatör rolünü oynayacaktır.

Açılımı t'li cinsten bir ifade

$\Delta x(t) = \text{---}$ (t'li ifade)

çözülür.

$$\Delta y(t) = \begin{vmatrix} L_1 & f_1 & L_3 \\ M_1 & f_2 & M_3 \\ N_1 & f_3 & N_3 \end{vmatrix} = \text{---} \quad (t\text{'li cinsten})$$

çözülür.

$$\Delta z(t) = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & f_1 \\ M_1 & M_2 & f_2 \\ N_1 & N_2 & f_3 \end{vmatrix} = \text{---} \quad (t\text{'li cinsten})$$

çözülür.

Ör! Sistemde hiç keyfi sabit bulunmasın, mertebesi sıfır olsun.

(1)
$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+x-y=e^t$$
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+x+y=t^2$$

$x(t)=?$, $y(t)=?$

$$(D+1)x+(D-1)y=e^t$$
$$(D^2+D+1)x+(D^2-D+1)y=t^2$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} D+1 & D-1 \\ D^2+D+1 & D^2-D+1 \end{vmatrix}=\cancel{D^3}-\cancel{D^2}+D+\cancel{D^2}-\cancel{D}+1-\cancel{D^3}-\cancel{D^2}-D+\cancel{D^2}+\cancel{D}+1$$

$$\boxed{\Delta=2}$$

$$\Delta x(t)=\begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ t^2 & D^2-D+1 \end{vmatrix}=D^2e^t-De^t+e^t-Dt^2+t^2$$

$$=\cancel{e^t}-\cancel{e^t}+e^t-2t+t^2$$

$$\boxed{x(t)=\frac{e^t}{2}-t+\frac{t^2}{2}}$$

$$\Delta y(t)=\begin{vmatrix} D+1 & e^t \\ D^2+D+1 & t^2 \end{vmatrix}=Dt^2+t^2-D^2e^t-De^t-e^t$$
$$=2t+t^2-e^t-e^t-e^t$$

$$\boxed{y(t)=t+\frac{t^2}{2}-\frac{3}{2}e^t}$$

Sistemin çözümü

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ör! 1 sabit için

3

$$\left.\begin{aligned}(D^2+D+1)x+(D^2+1)y&=e^t\\(D^2+D)x+D^2y&=e^{-t}\end{aligned}\right\}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}D^2+D+1 & D^2+1\\ D^2+D & D^2\end{vmatrix}=\cancel{D^4}+\cancel{D^3}+\cancel{D^2}-\cancel{D^4}-\cancel{D^3}-\cancel{D^2}-D$$

$$\Delta=-D$$

$$\Delta x(t)=-Dx(t)=-\frac{dx(t)}{dt}=\begin{vmatrix}e^t & D^2+1\\ e^{-t} & D^2\end{vmatrix}=e^t-e^{-t}-e^{-t}$$

$$=e^t-2e^{-t}$$

$$dx(t)=(-e^t+2e^{-t})dt$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)=-e^t-2e^{-t}+c_1}$$

$$\Delta y(t)=-Dy(t)=-\frac{dy(t)}{dt}=\begin{vmatrix}D^2+D+1 & e^t\\ D^2+D & e^{-t}\end{vmatrix}=e^{-t}-\cancel{e^{-t}}+\cancel{e^{-t}}-e^t-e^t$$

$$=e^{-t}-2e^t$$

$$dy(t)=(-e^{-t}+2e^t)dt$$

$$\boxed{y(t)=e^{-t}+2e^t+c_2}$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16