

Mat 2 2016 Final

1)

$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \end{bmatrix}$  matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz. (20 p)

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 5 & 3-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)(-4-\lambda) + 2 \cdot 6 \cdot (3-\lambda) \\ = (3-\lambda)(-16 + \lambda^2 + 12) = 3-\lambda(\lambda^2 - 4) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2^2) \\ = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2)$$

Özdeğerler:  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = -2$  için

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_3 = 3x_1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\lambda_2 = 2$  için

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_3 = x_1 \\ x_2 = -5x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -5x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$\lambda_3 = 3$  için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 = 0 \\ 6x_1 - 7x_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2x_3 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2)  $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$  fonksiyonun ekstremlarını inceleyiniz. (15 p)

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0$$

$$f_y(x,y) = 6xy - 6y = 0 \Rightarrow 6y(x-1) = 0$$

$$x=1 \vee y=0$$

$$x=1 \text{ iken } 3+3y^2-6=0 \Rightarrow 3y^2-3=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

$$y=0 \text{ iken } 3x^2-6x=0 \rightarrow x(3x-6)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=2$$

Kritik noktalar  $(1, -1), (1, 1), (0, 0), (2, 0)$

$$f_{xx} = 6x - 6, \quad f_{yy} = 6x - 6, \quad f_{xy} = 6y$$

$(1, -1)$  iken

$f_{xx}(1, -1) f_{yy}(1, -1) - f_{xy}^2(1, -1) < 0$  olduğundan  $f$  fonksiyonu  $(1, -1)$ 'de bir eger noktası sahiptir.

$(1, 1)$

$f_{xx}(1, 1) f_{yy}(1, 1) - f_{xy}^2(1, 1) < 0$  old.  $f$  fonk.  $(1, 1)$ 'de bir eger noktası sahip.

$(0, 0)$

$f_{xx}(0, 0) f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) > 0$  ve  $f_{xx}(0, 0) < 0$  old.  $f$  fonk.  $(0, 0)$  da bir yerel max. sahip.

$(2, 0)$  iken

$f_{xx}(2, 0) f_{yy}(2, 0) - f_{xy}^2(2, 0) > 0$  ve  $f_{xx}(2, 0) > 0$  old.  $f$  fonksiyonu  $(2, 0)$ 'da bir yerel mn. sahip.

3)  $x+3y-2z=4$  düzleminin orijine olan uzaklığını Lagrange yöntemleri kullanarak bul. (15p)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad g(x, y, z) = x + 3y - 2z - 4 = 0$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = \lambda(\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x = \lambda \\ 2y = 3\lambda \\ 2z = -2\lambda \\ x + 3y - 2z = 4 \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} \frac{\lambda}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2}\lambda - 2\left(-\frac{2}{2}\lambda\right) &= 4 \\ 14\lambda = 8 &\Rightarrow \lambda = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$(x, y, z) = \left( \frac{4}{14}, \frac{12}{14}, -\frac{4}{7} \right)$$

$x+3y-2z=4$  düzleminin orijine olan uzaklığı

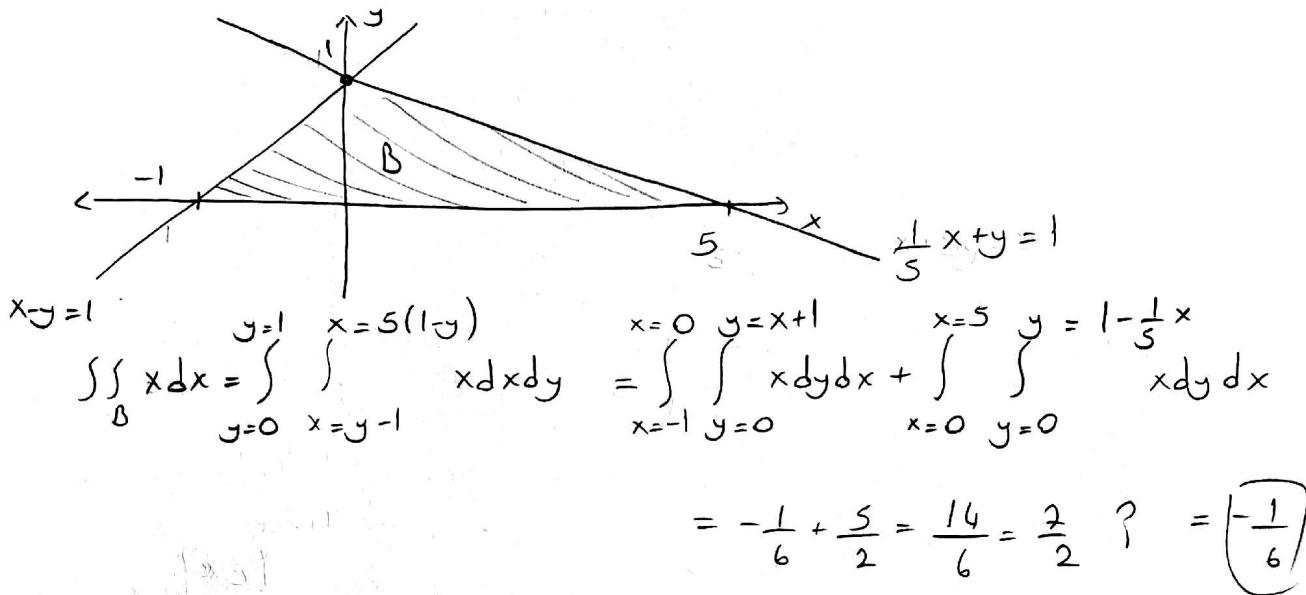
$$d = \sqrt{\left(\frac{4}{14}\right)^2 + \left(\frac{12}{14}\right)^2 + \left(-\frac{4}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{196} + \frac{144}{196} + \frac{16}{49}} = \sqrt{\frac{16}{196} + \frac{144}{196} + \frac{64}{196}} = \sqrt{\frac{224}{196}} = \sqrt{\frac{8}{7}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{14}}$$

4)  $B$  integrasyon bölgesi,  $x-y=-1$ ,  $x+5y=5$  ve  $x$  ekseni ile sınırlı bölge olsun.  
Buna göre  $\iint_B x dx dy$  integralini hesaplayınız. (15 p)

$$x-y = -1 \quad ; \quad x=0 \Rightarrow y=1 \\ y=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x+5y=5 \quad ; \quad x=0 \Rightarrow y=1 \\ y=0 \Rightarrow x=5$$



5)  $z = 6 - x^2 - y^2$  paraboloidi ve  $z = -3$  düzlemi ile sınırlı bölgenin hacmini bulınız (15 p)

$$-3 = 6 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D (6 - x^2 - y^2 - (-3)) dx dy = \iint_D 3 - (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (3 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} r^2 - \frac{r^4}{4} \Big|_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} d\theta = \frac{81}{2} \pi \end{aligned}$$

$$\frac{81}{2} - \frac{81}{4} = \frac{81}{4}$$