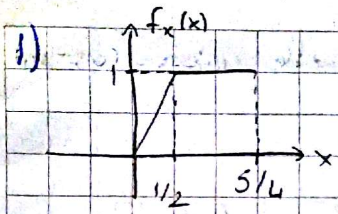
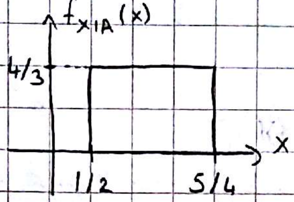
www.oguzhancakmak.com.tr

2014-2015 Olasılık Final

1) 

PDF'si yandaki gibi olan rastlantısal değişkene ilişkin $f_{X|A}(x)$'in grafiğini çiziniz. $\left(A = \left\{ \frac{1}{2} < x < \frac{5}{4} \right\}\right)$

$$Pr(A) = \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{\underset{(2)}{2}} \right) \cdot \underbrace{1}_{f_X(x)} = \frac{3}{4} \qquad f_{X|A}(x) = \frac{f_X(x)}{Pr(A)} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$



2) Aydaki bir uzay aracından Dünyaya gönderilen bir bitin doğru alınma olasılığı 0,95'tir. Buna göre gönderilen 10 bit için varyans ne olur?

$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$: binom dağılımı

$p = 0,95; \quad q = (1-0,95) = 0,05$

$$E[k] = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-1-k+1}$$

$$= np \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1}{m} p^m \cdot (1-p)^{n-1-m}}_{1 \text{ (Binom)}} = np \qquad E[k^2] = E[k(k+1)+k] = E[k] + E[k(k+1)]$$

$$E[k(k+1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(k-2)!(n-2)!} p^k (1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = 10(0,95) \cdot (0,05) = 0,475$$

3) $E[X] = -2$ ve $\overbrace{\underbrace{Var(x)}_{\text{Varyans}}}^{\sigma_x^2} = 0,5$ olan rastlantısal değişkene ilişkin $E[(x-1)^2] = ?$

$$E[(x-1)^2] = E[x^2 - 2x + 1]$$

$$Var(x) = E[x^2] - \mu_x^2 \Rightarrow E[x^2] = Var(x) + \overset{\text{ortalama}}{\mu_x}{}^2 = 0,5 + (-2)^2 = 4,5$$

$$E[(x-1)^2] = E[x^2] - 2E[x] + 1 = 4,5 - 2 \cdot (-2) + 1 = \underline{\underline{9,5}}$$

www.oguzhancakmak.com.tr

4) $f_x(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}u(x)$ olan rastlantısal değişkenine $y=x^2$ dönüşümü uygulandığında elde edilecek rastlantısal değişkenin pdf'si $f_y(y)=?$

$$y=x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x \;;\quad x=\mp\sqrt{y} \qquad f_y(y)=\sum \frac{f_x(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|}\Bigg|_{x=\mp\sqrt{y}} = \frac{f_x(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}+\frac{f_x(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

$$=\frac{1/2\, e^{-\frac{\sqrt{y}}{2}}}{2\sqrt{y}}D(y)+\frac{1/2\, e^{\frac{+\sqrt{y}}{2}}}{2\sqrt{y}}D(-y)$$

5) $f_x(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}u(x)$ olan rastlantısal değişkenin ortalama değerini hesaplayınız.

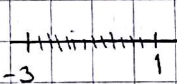
$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)\,dx=\int_0^{\infty}\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=2\int_0^{\infty} y e^{-y}dy=2$$

$$\frac{x}{2}=y \Rightarrow \frac{dx}{2}=dy \qquad \int \underbrace{y}_{u}\underbrace{e^{-y}dy}_{dv} \;;\; dv=e^{-y}dy \Rightarrow v=-e^{-y} \quad u=y$$

$$\int ye^{-y}dy=-y.e^{-y}+\int e^{-y}dy=-ye^{-y}-e^{-y}=-e^{-y}(y+1) \qquad \int_0^{\infty} ye^{-y}dy=-\frac{y+1}{e^y}\Bigg|_0^{\infty}=-\frac{1}{e^y}\Bigg|_0^{\infty}=1$$

6) Bir Gaussian rastlantısal değişkenine ilişkin ortalama değer 0 ve standart sapma 1 dir. $P(|x+1|<2)$ olasılığını Q fonksiyonu cinsinden hesaplayınız.

$$P(|x+1|<2)=P(-2<x+1<2)=Pr(-3<x<1)$$



$Pr(x>-3)-Pr(x>1)$ taralı alanı verir.

$$Q\left(\frac{-3-\overset{ort}{0}}{\underset{sp}{1}}\right)-Q\left(\frac{1-0}{1}\right)=Q(-3)-Q(1)=1-Q(3)-Q(1)$$

7) Ortalaması 1 varyansı 2 olan X rastlantısal değişkeni ile ortalaması -1 varyansı 1 olan Y Gaussian rastlantısal değişkeni birbirinden bağımsız ise bileşik pdf $f_{x,y}(x,y)=?$

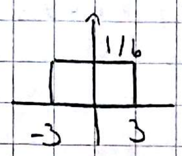
$$f_{x,y}(x,y)=f_x(x).f_y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi.\underset{\text{varyans}}{2}}}e^{\frac{-(x-\overset{ort}{1})^2}{2.\underset{\text{varyans}}{2}}}.\frac{1}{\sqrt{2\pi.\underset{\text{varyans}}{1}}}e^{\frac{-(y+1)^2}{2.\underset{\text{varyans}}{1}}}=\frac{1}{\pi 2\sqrt{2}}e^{\frac{-(x-1)^2}{4}}.e^{\frac{-(y+1)^2}{2}}$$

?

8) Bir X raslantı değişkeni matlabdaki rand fonksiyonu kullanılarak x=-6*rand+3 ile elde edilmektedir. Bu rastlantısal değişkenin 2'inci momentini bulunuz.

$x = -6 * \text{rand} + 3 \Rightarrow -6 * [0,1) + 3$, $(-3,3]$ aralığında sayı üretir.

$$E[x^2] = \int_{-3}^{3} x^2 \cdot \frac{1}{6}\, dx = 3$$



9) Sayısal bir haberleşme sisteminde 1 ve 0 bilgisi iletilmektedir. İletilen bilgiye Gauss gürültüsü karışmakta ve alıcıda elde edilen sinyal rastlantısal olarak değişmektedir. Alıcı aldığı sinyalin genliğine bakmaktadır. Alınan sinyalin genliği 0 gönderildiğinde ortalama 0V, 1 gönderildiğinde ise ortalama 1V'tur. Her iki durum için de varyans 0,5 olduğuna göre alınan sinyalin genliği 0,4V iken 1 gönderilmiş olma olasılığını Q fonksiyonu cinsinden bulunuz. 1 ve 0 gönderilme olasılıkları eşittir.

$$f_{X|M=1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 0{,}5}} \cdot e^{\frac{-(x-1)^2}{2 \cdot 0{,}5}} \qquad f_{X|M=0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 0{,}5}} \cdot e^{\frac{-(x-0)^2}{2 \cdot 0{,}5}}$$

$$Pr(M=1|0{,}4) = \frac{f_{X|M=1}(0{,}4) \cdot Pr(M=1)}{f_{X|M=1}(0{,}4) \cdot Pr(M=1) + f_{X|M=0}(0{,}4) \cdot Pr(M=0)} = \frac{e^{-\frac{(0{,}4-1)^2}{1}}}{e^{-0{,}36} + e^{-0{,}16}} = \underline{0{,}45}$$

10)

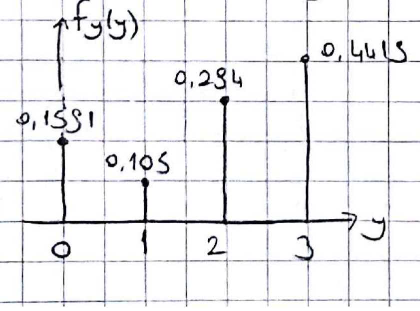
	x=-1	x=0	x=1	x=2	x=3	x=4
y=0	0,02	0,02	0,01	0,0001	0,02	0,089
y=1	0,02	0,05	0,015	0,001	0,012	0,007
y=2	0,014	0,023	0,2	0,025	0,016	0,016
y=3	0,01	0,002	0,001	0,34	0,076	0,0103

Tabloda verilenlere göre $F_{X,Y}(2,2) = ?$

$= 0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}014 + 0{,}023 + 0{,}05 + 0{,}02 + 0{,}01 + 0{,}015 + 0{,}2 +$

$0{,}025 + 0{,}001 + 0{,}0001 = \underline{0{,}3381}$

11) Yukarıdaki tabloya göre $f_Y(y)$'nin (Pdf) grafiğini çiziniz.



? 12) $[0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip birbirinden bağımsız iki rastlantısal değişkenin korelasyonunu $(R_{x,y}) = E[XY]$ bulunuz.

$$E[XY] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy}_{\text{Korelasyon}} = \int_0^1 y \int_0^1 x\,dx\,dy = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y^2\Big]_0^1 \cdot x^2\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}$$

13) $[0,1)$ aralığında düzgün dağılıma sahip birbirinden bağımsız iki rastlantısal değişkenin korelasyon katsayısını $(\rho_{x,y})$ bulunuz.

$$\rho_{x,y} = \underbrace{\frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\,\sigma_y}}_{\text{korelasyon katsayısı}} = \frac{E[xy] - m_x m_y}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \qquad m_x = \frac{1}{2},\ m_y = \frac{1}{2} \qquad \sigma_x^2 = E[x^2] - \mu_x^2$$

$$\sigma_x = \sigma_y = E[x^2] - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

(4) (3)

$$E[x^2] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \qquad \rho_{x,y} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{\frac{1}{12}}} = 0$$