

Öğrenci No ve Grubu :

Adı, soyadı :

İmzası :

Dersin Adı :Olasılık Kuramı

Dersin Sorumlusu :Prof. Dr. Temel KAYIÇIOĞLU

Yrd.Doç. Dr. Gökçe Hacıoğlu



Sınav Tarihi
2015-2016 Güz Dönemi

:11/11/2015
Ara Sınav

MUTLAKA OKUYUNUZ

Sınava cep telefonu, fotoğraf makinesi, kamera, ders notu, kitap, cep bilgisayarı getirilmesi yasaktır. Sınavda basit hesap makinesi kullanılabilir.

Soru kağıdını karalama olarak kullanmayınız. Size karalama için yalnızca **tek boş kağıt** verilecektir. Bu karalamadaki bilgiler dikkate alınmayacaktır. Sınav sonunda **karalama kağıdını da teslim etmek zorunludur.**

Sınav kağıdına ve karalama kağıdına Öğrenci No, Ad, Soyad ve İmza tükenmez kalemle yazılacaktır.

Sınavda malzeme alışverişi yapmak ve görevlilere soru sormak, izinsiz yerinden kalkmak, cevap kağıdını başkalarının göreceği şekilde tutmak, **ilave karalama kağıdı istemek yasaktır.**

Sınav süresi 100 dakikadır. 1 saat içinde sınavdan çıkmak yasaktır **B A Ş A R I L A R...**

SORULAR

Soru 1) Aşağıdakilerden doğru olmayanı kutu içine alınız? (5p)

- Eğer $A \subset B$ ise $\Pr(A) \leq \Pr(B)$
- Eğer $\Pr(B) > 0$ ise $\Pr(A|B) \geq \Pr(A)$
- $\Pr(A \cap B) \geq \Pr(A) + \Pr(B) - 1$
- $\Pr(A \cap \bar{B}) = \Pr(A \cup B) - \Pr(B)$

Soru 2) Bir biri ile eşdeğer k adet top rastgele olarak r adet kutuya atılmaktadır. Kutulara top atılması eşit olasılıklı ve her bir top atma diğerinden bağımsız olduğuna göre j 'inci kutunun boş olma olasılığına ilişkin PMF aşağıdakilerden hangisi olur. (5p)

Cevabı kutu içine alınız.

- $\binom{r}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$
- $\binom{k}{r} \left(\frac{1}{r}\right)^k$
- $\left(1 - \frac{1}{r}\right)^k$
- $\left(1 - \frac{1}{k}\right)^r$

Soru 3) İki adet hilesiz zar atılmaktadır. Atılan zarların ikisinin de aynı olması durumunda kazanılmakta aksi takdirde kaybedilmektedir. Eğer A birinci zarın 6, B ikinci zarın 6 gelmesini ve C 'de kazanma olayını gösteriyor ise aşağıdaki ifadelerden doğru olanı kutu içine alınız. (5p)

- A ve B olayları bağımsız değildir. —
- A ve C olayları bağımsızdır. ✓
- Kazanma olasılığı $\frac{3}{6}$ 'dir. —
- İkinci zarın 6 gelme olasılığı $\frac{1}{36}$ 'dir. —

Soru 4) Bir bozuk para atma deneyinde tura gelme olasılığı $\frac{1}{3}$ 'tür. Eğer T paranın 5 kez atılması sonucunda görülen turaların sayısını gösteriyor ise $\Pr(\text{ilk atışta tura gelmesi}|A)$ olasılığı hangisidir? ($A = \{T = 1\} \cup \{T = 5\}$) Kutu içine alınız. (5p)

- $\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5}$
- $\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5}$
- $\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5}$
- $\frac{1}{5}$

Soru 5) Ahmet ile Selim yeni birer bisiklet satın alacaktır. Bisiklet mağazasında 5 yeşil, 3 mavi ve 2 kırmızı bisiklet bulunmaktadır. Ahmet rastgele bir bisiklet seçip onu satın almıştır. Aynı şekilde biraz sonra da Selim rastgele bir bisiklet seçip satın almıştır. A Ahmet'in yeşil bisiklet satın almış olmasını B Selim'in yeşil bisiklet satın almış olmasını gösteriyor ise.

a) $\Pr(A)$ ve $\Pr(A|B) = ?$ (5p)

Cevap: $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$

b) Ahmet ve Selim'in en az birinin yeşil bisiklet almış olma olasılığı nedir? (5p)

Cevap:

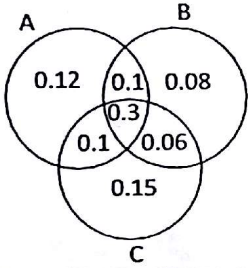
c) Ahmet ve Selim'in farklı renklerde bisiklet satın almış olma olasılıkları nedir? (5p)

Cevap:

d) Eğer Y Ahmet ve Selim'in alışverişinden sonra mağazada kalan bisiklet sayısını gösteriyor ise $\Pr(B|Y = 3) = ?$ (5p)

Cevap:

Soru 6) Aşağıdaki şekle göre $\Pr(A|B \cap C) = ?$ (10p)



Cevap:

Soru 7) MATLAB'ta yazılan $a * rand + b$ komutu ile (1,1.3) arasında sayılar üretilebilmesi için a ve b ne olmalıdır. (10p)

Cevap:

Soru 8) Bir asenkron haberleşme sisteminde ortalama olarak dakikada 100bit iletilmektedir. Buna göre dakikada 10bit iletilme olasılığı nedir. (Not: Poisson kullanılacak) (10p)

Cevap:

Soru 9) Yapılan 3 ok atışından sadece 1'inin hedefe vurma olasılığı 0.25'tir. Buna göre yapılan 5 ok atışından 2'sinin hedefe vurma olasılığı nedir? (10p)

Cevap:

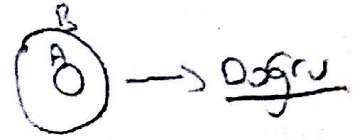
Soru 10) Satın alınan bir beyaz eşyanın 10 yıl ömrünün olma olasılığı 0.87'dir. Beyaz eşyanın ömrü k ile gösterildiğinde ömrüne ilişkin olasılık kümelenme fonksiyonu $P_X(k) = \alpha n^k$ ise α ve n arasındaki matematiksel ifadeyi bulunuz. (10p)

Cevap:

Soru 11) Bir toplumda A hastalığının görülme olasılığı 0.1'dir. A hastalığına ilişkin teşhis tahlilindeki bir değer 2.2'den büyük olması ile yapılmaktadır. Tahlil sonucunun hasta olmayan biri için 2.2'den büyük çıkma olasılığı 0.001 ve hasta olan biri için 2.2'den küçük olma olasılığı 0.02 olduğuna göre hasta teşhisi alan birinin hasta olmama olasılığı nedir. (Bayes ile çözülebilir.)

Cevap:

1) - Eğer $A \subset B$ ise $Pr(A) \leq Pr(B)$

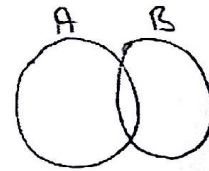


- Eğer $Pr(B) > 0$ ise $Pr(A|B) \geq Pr(A)$
 $Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} \geq Pr(A)$ olasılığın

$Pr(A \cap B) \geq Pr(A) \cdot Pr(B)$ olması

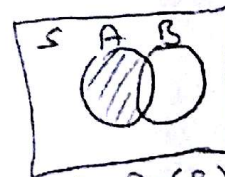
B olayının oluşmasından sonra
 A olayının oluşma olasılığı her zaman
 A olayının oluşma olasılığından büyüktür
 diyemeyiz. Yanlış

- $Pr(A \cap B) \geq Pr(A) + Pr(B) - 1$



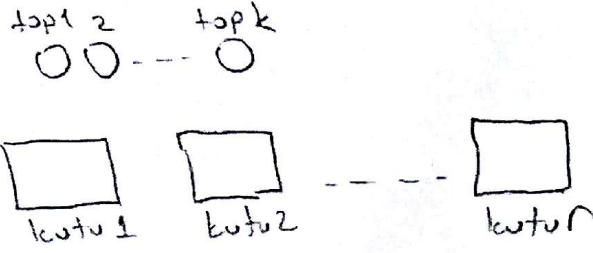
$Pr(A) + Pr(B)$ en fazla 1 olması dolayısıyla
 $Pr(A) + Pr(B) - 1 \leq Pr(A \cap B)$ çünkü $Pr(A \cap B) \geq 0$ dir.
doğru

- $Pr(A \cap \bar{B}) = Pr(A \cup B) - Pr(B)$



Taralı bölge = $Pr(A \cap \bar{B}) = Pr(A \cup B) - Pr(B)$ doğru

2)



her bir kutuya top atılma olasılığı = $\frac{1}{r}$

k adet denemede bir kutuya m adet top atılma olasılığı

şöyledir: $\binom{k}{m} \left(\frac{1}{r}\right)^m \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{k-m}$

$m=0$ olma olasılığı (yani kutunun boş olması) = $\binom{k}{0} \left(\frac{1}{r}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{r}\right)^k$

$$= \left(1 - \frac{1}{r}\right)^k$$

3)

İki adet zar atılıyor

A: Birinci zarın 6 gelmesi

B: İkinci zarın 6 gelmesi

C: İki zarın aynı olması

- A ve B olayları bağımsız değildir → Yanlış

- A ve C olayları bağımsızdır → $\Pr(A, C) = \Pr(A) \cdot \Pr(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ Doğru

- $\Pr(\text{kazanma}) = \Pr(1,1) + \Pr(2,2) + \Pr(3,3) + \dots + \Pr(6,6) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6} \neq \frac{3}{6}$ yanlış

- İkinci zarın 6 gelme olasılığı = $\frac{1}{6}$ 'dir. (Yanlış: $\frac{1}{6} + \frac{1}{36}$)

$$4) \Pr(\text{Tura}) = \frac{1}{3} \quad \Pr(\text{Yazı}) = \frac{2}{3}$$

T: P paranın 5 kez atılması sonucunda gelen turların sayısı

$$\Pr(\text{ilk atışta tura gelmesi} \mid A) = ?$$

$$A: \{T=1\} \cup \{T=5\}$$

$$\Pr(A) = \Pr(\{T=1\} \cup \{T=5\}) = \Pr(\{T=1\}) + \Pr(\{T=5\}) - \Pr(\{T=1\} \cap \{T=5\})$$

$$\Pr(T) = \binom{5}{T} \left(\frac{1}{3}\right)^T \left(\frac{2}{3}\right)^{5-T}$$

$$\Pr(T=1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\Pr(T=5) = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$\Pr(\{\text{ilk atışta tura gelmesi}\} \mid A) = \frac{\Pr(\{\text{ilk atışta tura gelmesi}\} \cap A)}{\Pr(A)}$$

$$\Pr(\text{ilk atışta tura gelmesi} \cap A) = \Pr(\text{ilk atışta tura gelmesi ve sonraki 4 atışta } T=0 \text{ olması})$$

$$\text{Cevap: } \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5}{5 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5}$$

$$+ \Pr(\text{ilk atışta tura gelmesi ve sonraki 4 atışta } T=6 \text{ olması})$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

Sayfa 4

- 5) 5 Yeşil
3 Mavi
2 Kırmızı

A: Ahmet'in yeşil bisiklet satın alması

B: Selim'in yeşil bisiklet satın alması

Önce Ahmet sonra Selim bisiklet satın alıyor

a) $Pr(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ A'dan sonra B'ni de alabilir.

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(B|A)Pr(A)}{Pr(B)} = \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

$$\begin{aligned} Pr(B) &= Pr(A, B) + Pr(\bar{A}, B) = Pr(B|A)Pr(A) + Pr(B|\bar{A})Pr(\bar{A}) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- c) $Pr(\text{Farklı renklerde bisiklet satın alma}) = Pr(\overbrace{\text{Ahmet Yeşil}}^Y, \overbrace{\text{Selim Yeşil}}^{\bar{Y}}) + Pr(\overbrace{\text{Ahmet Mavi}}^M, \overbrace{\text{Selim Mavi}}^{\bar{M}}) + Pr(\overbrace{\text{Ahmet Kırmızı}}^K, \overbrace{\text{Selim Kırmızı}}^{\bar{K}})$

$$\begin{aligned} &= Pr(\bar{Y}|Y)Pr(Y) + Pr(\bar{M}|M)Pr(M) + Pr(\bar{K}|K)Pr(K) \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{9} \\ &= \frac{25+21+16}{90} = \frac{62}{90} \approx 0,688 \end{aligned}$$

Soru 5

b) $Pr(\text{en az birinin yeşil bisiklet olması}) = 1 - Pr(\text{hiçbirinin yeşil bisiklet almaması})$

$$Pr(\text{hiçbirinin yeşil bisiklet almaması}) = Pr(\bar{A}, \bar{B})$$

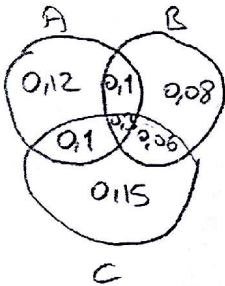
$$= Pr(\bar{B} | \bar{A}) Pr(\bar{A})$$

$$= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} = \frac{4}{16}$$

$$Pr(\text{en az birinin yeşil bisiklet olması}) = 1 - \frac{4}{16} = \frac{16-4}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Soru 6



yada $Pr(A|B \cap C) = \frac{Pr(A \cap B \cap C)}{Pr(B \cap C)} = \frac{0,03}{0,06} = 0,5$

Soru 7

$a * rand + b$ ile $(1, 1, 3)$ arasında sayı üretile bilmesi için

$(0, a)$

$(b, a+b)$

$b = 1$
 $a = 0,3$

Soru 8

dakikada 100 bit iletilmektedir. $\Rightarrow \alpha = 100 \text{ bit/dakika}$

$$P_x(k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = \frac{(100)^k}{k!} e^{-100} \Rightarrow P_x(10) = \frac{(100)^{10}}{10!} e^{-100}$$

$$P_x(10) \approx 1,025 \cdot 10^{-30}$$

$$9) \Pr(3 atıştan 1'inin hedefi vurması) = 0,25 = \binom{3}{1} p^1 (1-p)^2$$

$$\boxed{0,25 = 3p(1-p)^2} \quad (\text{I})$$

denklemden $p \approx 0,10374$ yada $p \approx 0,6388$ gelir.

$$\begin{aligned} \Pr(5 atıştan 2'sinin vurulması) &= \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 \quad (\text{II}) \\ &= \frac{5!}{3!2!} (0,10374)^2 (1-0,10374)^3 \\ &= \frac{4 \cdot 5}{2} (0,10374)^2 (1-0,10374)^3 \\ &\approx \boxed{0,0774} \end{aligned}$$

$$p = 0,6388 \text{ için cevap} = \boxed{0,1922}$$

I ve II'nin ilersini de yazanlar yada rakamsal cevabı bulanların cevapları doğru kabul edilecektir.

$$10) \Pr(10 yıl ömür) = 0,87$$

$$P_x(k) = \alpha \cdot n^k$$

$$P_x(k=10) = \alpha \cdot n^{10} = 0,87$$

$$\boxed{\alpha \cdot n^{10} = 0,87}$$

$$11) \Pr(H) = 0,1 : \text{Hasta olma olasılığı}$$

$$\Pr(\bar{H} | T) = 0,001 : \text{Hasta olmayan birinin tahlilde hasta çıkması}$$

$$\Pr(H | \bar{T}) = 0,02 : \text{Hasta olan birinin tahlilde sağlam çıkması}$$

$$\boxed{\Pr(\bar{H} | T) = 0,001} \text{ cevap}$$

Aslında $\Pr(T | \bar{H})$ sorulacaktı