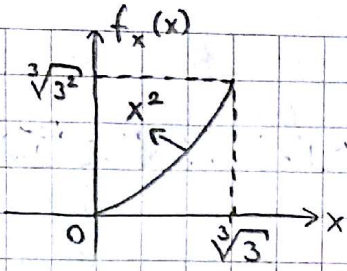


2015-2016 Final



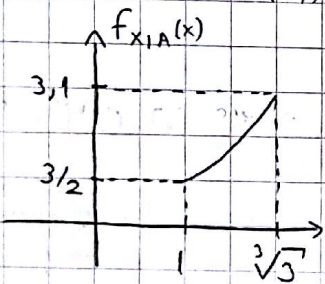
1, 2, 3, 4'e yandaki şekle göre cevaplayınız.

$$1) P_r\{X < 1\} = ? \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

2) A olayı $X > 1$ 'dir. A olayının gerçekleştiği biliniyorsa $f_{X|A}(x)$ 'in grafiğini çiziniz.

$$A = \{X > 1\} \Rightarrow P_r(A) = \int_1^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{3} [3 - 1] = \frac{2}{3}$$

$$f_{X|A}(x) = \frac{f_x(x)}{P_r(A)} = \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\frac{2}{3}} = 3,1 \quad P_r(A) \cdot u = 1 \Rightarrow u = \frac{1}{P_r(A)} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$



3) $E[X] = ?$ (x 'in ortalaması değeri.)

$$E[X] = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x \cdot f_x(x) \cdot dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x \cdot x^2 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{3}$$

4) $Y = X - 3$ dönüşümü ile elde edildiğine göre, $f_Y(y) = ?$

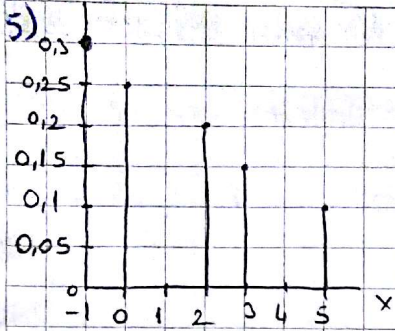
$$Y = X - 3 \Rightarrow X = Y + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} = \frac{f_X(y+3)}{1} = (y+3)^2$$

$$x = g(y) = y + 3$$

$P_x(x)$



şekle göre x 'in ortalaması kaçtır?

$$E[x] = (-1) \cdot (0,3) + 0 \cdot (0,25) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (0,2) + 3 \cdot (0,15) + 4 \cdot 0 + 5 \cdot (0,1)$$

$$E[x] = \underline{\underline{1,05}}$$

6) Bir haberleşme sisteminde 1, -1, 3, -3 genlikleri sinyaller ile iletilmektedir. İletilen sinyallere Gauss gürültüsü konusmakta ve alıcıda elde edilen sinyal rastlantısal olarak değişmektedir. Alıcı aldığı sinyalin genliğine bakmaktadır. Alınan sinyalin genliği 1 gönderildiğinde ortalama 1V, -1V gönderildiğinde -1V, 3V gönderildiğinde 3V, -3V gönderildiğinde -3V tür. Her durumda varyans 1 olduğuna göre alınan sinyalden elde edilen genlik 1,4V iken 1 gönderilmiş olma olasılığını Q fonksiyonu cinsinden bulunuz. Not: 1, -1, 3, -3 gönderilme olasılıkları eşit yani $1/4$ tür. (Bayes kullanılabilir)

$$P_r(m=1 | x=1,4) = \frac{f_{x|m=1}(x) \cdot Pr(m=1)}{f_{x|m=1}(x) \cdot Pr(m=1) + f_{x|m=-1}(x) \cdot Pr(m=-1) + f_{x|m=3}(x) \cdot Pr(m=3) + f_{x|m=-3}(x) \cdot Pr(m=-3)}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1,4-1)^2}{2 \cdot 1}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1,4-1)^2}{2 \cdot 1}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1,4+1)^2}{2 \cdot 1}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1,4-3)^2}{2 \cdot 1}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(1,4+3)^2}{2 \cdot 1}}}$$
$$= \frac{e^{-0,08}}{e^{-0,08} + e^{-2,88} + e^{-1,28} + e^{-9,68}} = \underline{\underline{0,7341}}$$

Diagram: A normal distribution curve with mean ort and variance $2 \cdot \text{Var}$. The signal amplitude is $\frac{(x - \text{ort})^2}{2 \cdot \text{Var}}$.

7) X rastlantısal değişkeni ortalaması 2'ye standart sapması 1 olan normal (Gauss) dağılımlı ve Y rastlantısal değişkeni -1 ile 1 arasında düzgün dağılımlı olduğuna göre $E[x^2 + 3y^2] = ?$

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - \mu_x^2 \Rightarrow E[x^2] = \sigma_x^2 + \mu_x^2 = 1 + (2)^2 = 5$$

σ_x^2 : standart sapma
 μ_x^2 : ortalama

$$E[y^2] = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} y^2 dy = \frac{1}{3}$$

$$E[x^2 + 3y^2] = 5 + 3 \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{6}}$$

8) Bir sayısal TV yayınında bir bitin hatalı olma olasılığı 10^{-6} dir. TV yayınında bir görüntü 1320×1080 pikselde olmaktadır ve her bir piksel 24 bit ile ifade edilmektedir. Sanjyede 25 görüntü ileildiğine göre 1 dk'lık bir yayında ortalama kaç bit hatalı olur.

$$1 \text{ dk'lık yayında bit sayısı} = 60 \times 1320 \times 1080 \times 24 \times 25 = 7,46436 \times 10^{10}$$

$$n.p = 7,46436 \times 10^{10} \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{74643,6 \text{ adet}}}$$

9) $f_{x,y}(x,y) = e^{-x-y}$; $x \geq 0, y \geq 0$ olduğuna göre $F_y(y) = ?$ (CDF)

$$f_{x,y}(x,y) = e^{-x-y} \cdot U(x) \cdot U(y)$$

$$f_y(y) = e^{-y} \cdot U(y)$$

$$F_y(y) = \int_0^y e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_0^y = -[e^{-y} - 1] = \underline{\underline{1 - e^{-y}}}$$

10) Görüntülü bir ölçüm sisteminde ölçülmesi istenilen sinyal $y(t)$ ile gösterilmektedir. Ölçülen sinyal ise $d(t) = y(t) + n(t)$ dir. Ölçülen değerdeki $n(t)$ "0" ortalamalı ve varyansı 1 olan Gauss gürültüsüdür. $y(t) = 2 \sin(100\pi t)$ olan sinyalin gücü $E[y^2(t)]$ ölçülen sinyalde dayanarak $E[d^2(t)]$ olarak ölçülse kaç watt ölçülür.

$$(E[y(t) \cdot n(t)] = 0)$$

$$d(t) = y(t) + n(t)$$

$$E[d^2(t)] = E[y^2(t) + n^2(t) + 2y(t)n(t)] = E[y^2(t)] + E[n^2(t)] + 2E[\cancel{y(t)n(t)}]$$

$$= \underbrace{E[y^2(t)]}_{y'nin \text{ varyansı}} + \underbrace{E[n^2(t)]}_{n'nin \text{ varyansı}}$$

$$E[y^2(t)] = E[4 \sin^2(100\pi t)]$$

$$y(t) = 2 \sin(100\pi t) \Rightarrow \text{Periyot} = T_0 = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$$

$$E[y^2(t)] = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} 4 \sin^2(100\pi t) dt = 2$$

$$50 \cdot 4 \cdot \frac{1}{100} = 2$$

$$E[d^2(t)] = E[y^2(t)] + E[n^2(t)] = 2 + 1 = \underline{\underline{3}}$$