

1) Bir cihazın ömrüne ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f_x(t) = 0,2te^{-0,1t^2} u(t)$  dir. Burada  $t$  yıl cinsinden zamanı göstermektedir. Buna göre cihaz kullanılmaya başlandı. 4 yıl olursa cihazın en az 10 yıl dayanma olasılığı nedir? (İpucu: koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılabilir.)

$$f_{x|A} = \frac{f_x(t)}{Pr(A)} = Pr(A) = \int_0^4 0,2te^{-0,1t^2} dt = 0,738$$

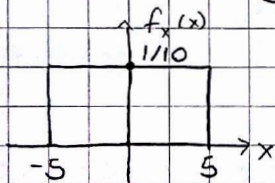
$$Pr(\text{en az 10 yıl dayanma}) = Pr(t \geq 10)$$

$$Pr(t \geq 10) = \int_{10}^{\infty} f_{x|A}(t) dt = \int_{10}^{\infty} \frac{f_x(t)}{Pr(A)} dt = \frac{1}{Pr(A)} \int_{10}^{\infty} f_x(t) dt = \frac{1}{0,738} \int_{10}^{\infty} 0,2te^{-0,1t^2} dt$$

$$\frac{1}{0,738} \cdot \frac{0,2 \cdot t^2}{2} \cdot \frac{e^{-0,1t^2}}{-0,1t^2} \Big|_{10}^{\infty} = -\frac{1}{0,738} e^{-0,1t^2} \Big|_{10}^{\infty} = -\frac{1}{0,738} (0 - e^{-10}) = \underline{\underline{5,6832 \times 10^{-5}}}$$

2) Bir sinyalin içindeki DC değer o sinyalin ortalamasıdır.  $-5V$  ile  $+5V$  arasında değerler alan düzgün dağılımlı rastgele bir sinyale ortalaması 1 varyansı 0,1 olan Gauss dağılımlı gürültü karıştırılmaktadır.

Bu durumda ölçülen gürültülü sinyalin DC değeri ne olacaktır?



$y = x + n \rightarrow$  Gürültü  
Bölünmek istenen sinyal

$$E[y] = E[x+n] = \overbrace{E[x]}^0 + \overbrace{E[n]}^1$$

$$E[y] = \underline{\underline{1}}$$

$$E[x] = \int_{-5}^5 \frac{1}{10} x dx = 0$$

3) Bir haberleşme sisteminde alıcı alınan paket hatalı ise vericiden paketin tekrar gönderilmesini istemektedir. Bir paketin yanlış alınma olasılığı  $10^{-1}$  dir. Buna göre 1000 paket ortalama kaç tekrarda alıcıya ulaşır.

$P$ : paketin yanlış alınma olasılığı

$$P_x(k) = p^{k-1} (1-p)$$

$$E[k] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p^{k-1} (1-p) = (1-p) \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{\infty} p^k = (1-p) \cdot \frac{d}{dp} \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9}$$

$$1000 \text{ paket için ortalama değer} = E[1 \text{ paket}] + E[2 \text{ paket}] + \dots + E[1000 \text{ paket}] = 1000 \cdot \frac{10}{9} = 1111,11$$

$$\frac{1}{1000} \times 10^{-1} \quad \frac{1}{100} \times 10^{-1} \quad \frac{1}{10} \times 10^{-1} \quad 1 \times 10^{-1} = 1111,11$$

100

10

1



X \ Y	-1	0	1	2	3
-2	0,1	0,02	0,001	0,02	0,008
-1	0,13	0,08	0,034	0,07	0,012
0	0,05	0,007	0,042	0,01	0,044
1	0,12	0,093	0,023	0,1	0,036

4, 5, 6. inci sorular, tabloya göre cevapla

4)  $E[X] = ?$

$$E[X] = 0,4(-1) + 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2 + 0,1 \cdot 3 = -0,4 + 0,1 + 0,4 + 0,3 = \underline{0,4}$$

5) Korelasyon katsayısı  $\rho_{XY} = ?$

Korelasyon katsayısı

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X-M_X)(Y-M_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[XY] - M_X M_Y}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$M_Y = (-2) \cdot 0,149 + (-1) \cdot 0,326 + 0 \cdot 0,153 + 1 \cdot 0,372 = -0,298 - 0,326 + 0,372 = \underline{-0,252}$$

$$E[X^2] = 0,4(-1)^2 + 0,2 \cdot 0^2 + 0,1 \cdot 1^2 + 0,2 \cdot 2^2 + 0,1 \cdot 3^2 = 0,4 + 0,1 + 0,8 + 0,9 = \underline{2,2}$$

$$E[Y^2] = 0,149(-2)^2 + 0,326(-1)^2 + 0,153 \cdot 0^2 + 0,372 \cdot 1^2 = 0,596 + 0,326 + 0,372 = \underline{1,294}$$

$$M_X = \underline{0,4} = 4. \text{ soruda bulunmaktak}$$

$$E[XY] = (-2) \cdot (-1) \cdot 0,1 + (-2) \cdot 0 \cdot 0,02 + (-2) \cdot 1 \cdot 0,001 + (-2) \cdot 2 \cdot 0,02 + (-2) \cdot 3 \cdot 0,008 = 0,2 - 0,002 - 0,08 - 0,08$$

$$+ (-1) \cdot (-1) \cdot 0,13 + (-1) \cdot 0 \cdot 0,08 + (-1) \cdot 1 \cdot 0,034 + (-1) \cdot 2 \cdot 0,07 + (-1) \cdot 3 \cdot 0,012 = 0,13 - 0,034 - 0,14 - 0,036$$

$$0 \cdot (-1) \cdot 0,05 + 0 \cdot 0 \cdot 0,007 + 0 \cdot 1 \cdot 0,042 + 0 \cdot 2 \cdot 0,01 + 0 \cdot 3 \cdot 0,044 = 0$$

$$1 \cdot (-1) \cdot 0,12 + 1 \cdot 0 \cdot 0,093 + 1 \cdot 1 \cdot 0,023 + 1 \cdot 2 \cdot 0,1 + 1 \cdot 3 \cdot 0,036 = -0,12 + 0,023 + 0,2 + 0,108$$

$$0,07 - 0,08 + 0,211 = \underline{0,201}$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - M_X^2 = 2,2 - 0,16 = 2,04 \quad \sigma_X = \underline{1,428}$$

$$\sigma_Y^2 = E[Y^2] - M_Y^2 = 1,294 - 0,063504 = 1,2304 \quad \sigma_Y = \underline{1,109}$$

$$\rho_{XY} = \frac{0,201 - 0,4 \cdot (-0,252)}{1,428 \cdot 1,109} = \underline{\underline{0,1905}}$$



6)  $Pr(Y < 0 | X > 0) ? = \frac{Pr(Y < 0, X > 0)}{Pr(X > 0)} = \frac{\text{Total Bölgenin alanı}}{Pr(X=1) + Pr(X=2) + Pr(X=3)} = \frac{0,165}{0,4} = 0,3625$

(Yatay yada dikey toplan)

$Pr(X=1) = 0,1$ ,  $Pr(X=2) = 0,2$ ,  $Pr(X=3) = 0,1$

7)  $Y = \frac{X-30}{10}$  dönüşümü ile elde edilen bir rastlantısal değişkendir.  $X$ , ortalaması 30, varyansı 5 olan Gauss rastlantısal değişkeni olduğuna göre  $E[Y^2] = ?$   $E[X] = \mu_x$ ,  $\sigma_x^2$

$$E[Y^2] = \left(\frac{X-30}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} E[X^2 - 60X + 900] = \frac{1}{100} (E[X^2] - 60E[X] + 900)$$

$$\sigma_x^2 = 5 \quad \sigma_x^2 = E[X^2] - \mu_x^2 \quad 5 + 30^2 = E[X^2] \quad E[X^2] = 305$$

$$\frac{1}{100} (305 - 60 \cdot 30 + 900) = \frac{1}{100} (1805 - 1800) = \frac{5}{100}$$

8) Sayısal 1 bilgisi iletildiğinde ortalaması 0,5V standart sapması 0,05V olan, sayısal 0 bilgisi iletildiğinde ise ortalaması -0,5V standart sapması 0,05V olan Gauss dağılımlı sinyaller alıcıda alınmaktadır.

Buna göre -0,02V alıcıda elde edilmişse 1 gönderilmiş olma olasılığını bulunuz.

$$Pr(M=1 | X = -0,02) = \frac{f_{X|M=1}(X = -0,02) \cdot Pr(M=1)}{f_{X|M=1}(X = -0,02) \cdot Pr(M=1) + f_{X|M=0}(X = -0,02) \cdot Pr(M=0)}$$

$$\text{Sinyal} \leftarrow \frac{(X - \mu)^2}{2 \cdot \text{Var}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \text{Var}}}$$

Varyans (standart sapma)<sup>2</sup>

$$\frac{e^{-(-0,02-0,5)^2/50 \cdot 10^{-4}}}{e^{-(-0,02-0,5)^2/50 \cdot 10^{-4}} + e^{-(-0,02+0,5)^2/50 \cdot 10^{-4}}} = \frac{3,261 \cdot 10^{-24}}{(3,261 \cdot 10^{-24} + 5,72 \cdot 10^{-21})} = 3,353 \cdot 10^{-6}$$

9) Gönderilen bir füze hedefe 0,34 olasılıkla tam isabet etmektedir. Hedefe gönderilen 100 füzelerin ortalamada kaç tonası hedefe isabet eder?

$$\text{Binomun ortalaması değeri} = n \cdot p = 100 \cdot 0,34 = \underline{34}$$

$$\begin{aligned} & 0,5 \\ & 5 \cdot 10^{-2} \\ & 30 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$