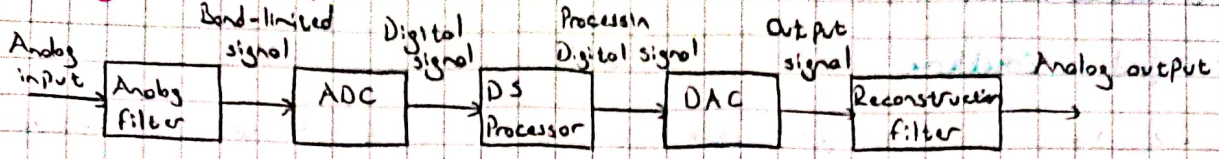


1.1. Sayısal İşaret İşlemenin Temel Kavramları



Şekil 1.1. Bir dijital sinyal işleme sistemi

DSP kavramı, bir analog filtre, Analog dijital dönüştürücü (ADC), Dijital sinyal işleme, dijital analog dönüştürücü (DAC) ve yeniden yapılandırma filtresinden oluşur.

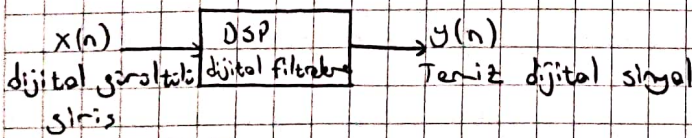
1.2. Blok Diyagramlarda Temel Dijital Sinyal İşleme Örnekleri

Öncelikle blok diyagramları kullanarak dijital gürültü filtresi ve sinyal frekans analizine bakalım.

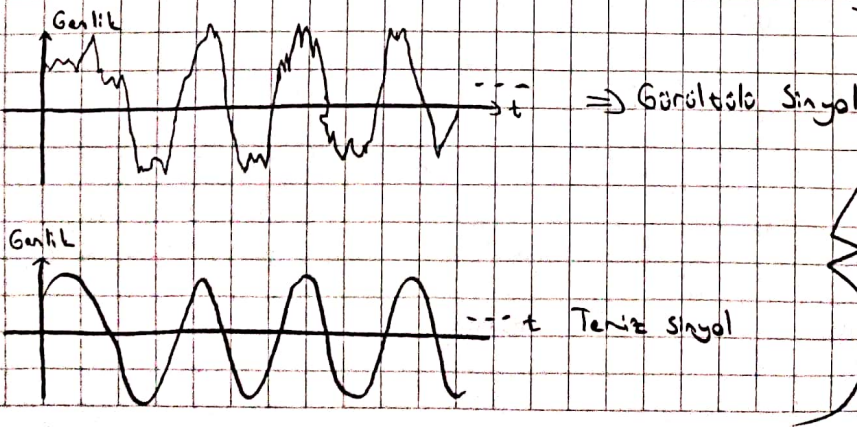
1.2.1. Dijital Filtreleme

Yararlı sinyalinizi düşük frekanslı bileşen içerdiğinden, yararlı sinyalinizin üzerindeki yüksek frekanslı bileşenler, bir alçak geçiren filtre kullanılarak yararlı sinyalden ayrıştırılabilir. Gürültüler olarak kabul edilir.

Şimdiye kadar sayısallaştırılmış gürültülü sinyal ve temiz dijital sinyal, şekil 1.3'de gösterilmiş olup, üst kısım sayısallaştırılmış gürültülü sinyali, alt kısımda alçak geçiren filtre uygulanarak temizlenen dijital sinyali göstermektedir.



Şekil 1.2. Basit dijital filtreleme bloğu



Şekil 1.3. (Üst) Sayısallaştırılmış gürültülü sinyal, (Alt) Dijital alçak geçiren filtre kullanılarak elde edilen temiz sinyal

2. Sinyal Örnekleme ve Örnekleme

2.1. Sürekli sinyal ve örnekleme

Şekil 2.2 Zaman eksenini ve gerilim eksenini üzerindeki her noktada tanımlanan bir analog sinyali göstermektedir. Doğrusuyla analog sinyal sonsuz sayıda noktada kesilir.

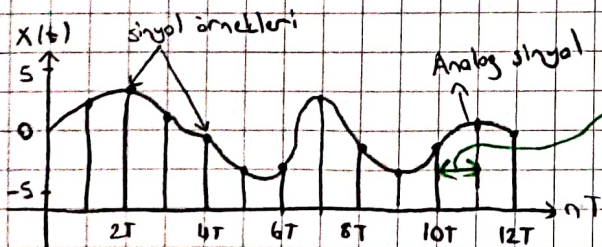
Sonsuz sayıda noktayı sayısallaştırmak mümkün değildir. Bunun için sonsuz sayıda bellek ve işlem gerekir. Örnekleme Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'de gösterildiği gibi sabit zaman aralığındaki noktaları alarak bu sorunu çözebilir. Burada T süresi, örnekleme aralığını veya örnekleme süresini, soniye cinsinden gösterir.

$$f_s = \frac{1}{T} \text{ (Hz)} \text{ (Saniyedeki örnekleme sayısı)}$$

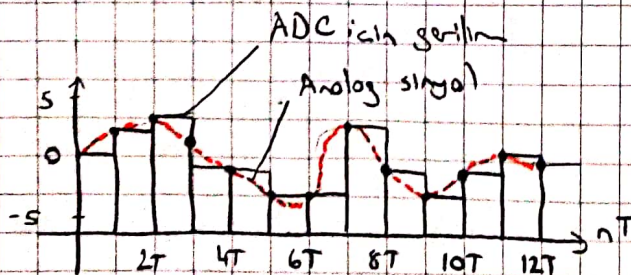
Örneğin bir örnekleme periyodu $T = 125 \mu s$ ise örnekleme frekansı

$$f_s = \frac{1}{125 \mu s} = 8000 \text{ (Hz)} \text{ saniyedeki örnekler}$$

Analog sinyal örneklendikten sonra, örneklenen sinyal sayıları işlemcide tutulur böylece örneklennmiş sinyalden yeniden analog sinyal elde etmek istendiğinde bu örneklenen anlamlı ki gerilim değerleri birleştirilerek yapılır. Örneklennmiş sinyalden ilk analog hale dön-
mek için minimum örnekleme oranının sağlanması gerekmektedir.



Şekil 2.2 Analog sinyal ve örneklennmiş dijital sinyal



Şekil 2.3. ADC için örnekleme ve tutulan analog voltajı

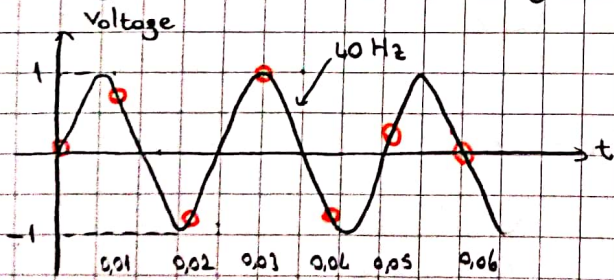
Örnekleme teoremi, bir analog sinyalin teoride, örnekleme hızı örneklenecek analog sinyalin en yüksek frekans değerinin iki katı olursa analog sinyal nükemmel şekilde geri dönüştürülebilir. f_s : Örnekleme frekansı

$$f_s \geq 2f_{max}$$

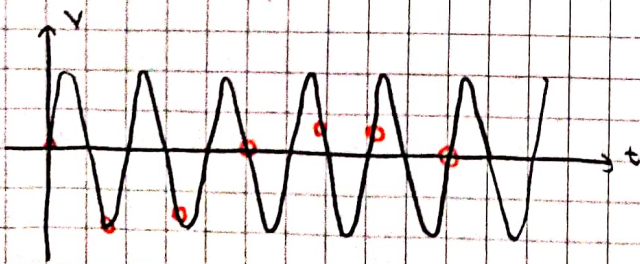
Örneğin 4 kHz'ye kadar frekanslar içeren bir konuşma sinyalini örneklenecek için, minimum örnekleme hızı soniyede en az 8 kHz olmalıdır veya 8000 örnek seçilmelidir.

Şekil 2.4'de örnekleme periyodunun $T=0,01$ sn olduğu ve örnekleme frekansının 100 Hz olduğu iki sinyal gösterilmektedir. Şekildeki ilk sinyal 40 Hz frekanslı bir sinüs sinyalinin örneklennmiş genliklerini göstermektedir. Örnekleme teoremi koşulunca, $2f_{max}=80 \text{ Hz} < f_s$ olduğundan sinyal sağlıklı bir şekilde örneklenebilmektedir. Örneklenen genlikler yeniden birleştirildiğinde ilk analog sinyale benzer bir sinyal elde edileceği için örnekleme işlemi başarılıdır.

İkinci şekilde 30 Hz frekanslı bir sinüs dalgası verilmiş ve 100 Hz'de örneklennmiştir. Örnekleme teoremi gereğince $2f_{max}=60 \text{ Hz} < f_s$ olduğundan aslında sinyalin sağlıklı bir şekilde örneklenebileceği görünür. Bu sinyaldeki örnekleme noktaları birleştirilirse ilk sinyalden çok farklı bir sinyal elde edilir ve baslangıçtaki hale dönmek mümkün değildir.



Şekil 2.4



Şekil 2.5, sürekli sinyal olan $x(t)$ 'nin f_s örnekleme hızında, örneklemeyle elde edilen $x_s(t)$ 'yi göstermektedir.

Matematiksel olarak, bu işlem sürekli sinyalin ve örnekleme darbelerinin ürünü olarak yazılabilir,

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) \quad (2.1)$$

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t)$$

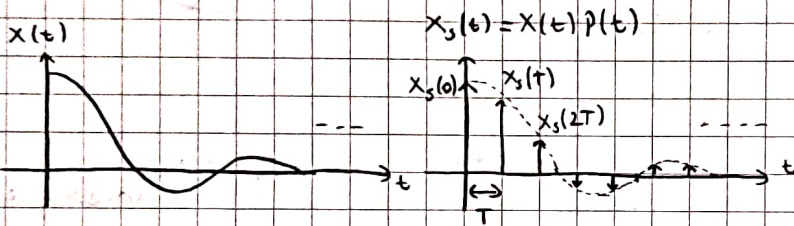
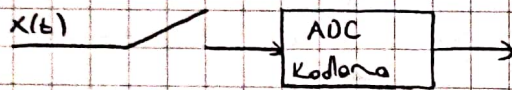
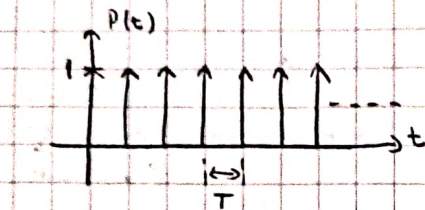
$$\mathcal{F}\{x_s(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) \cdot p(t)\}$$

$$= x(t) * p(t)$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{jk\omega_0 t}$$

Şekil 2.5

Basitleştirilmiş örnekleme işlemi



$p(t)$, $T = \frac{1}{f_s}$ periyodu olan "pulse train"dır. Spektral analizden, Hz cinsinden orijinal spectrum (frekans bileşenleri) $X(f)$ ve örneklenmiş sinyal spektrumu $X_s(f)$

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \quad (2.2)$$

(2.2) denklemini genişletilirse (2.3) denklemini elde edilir,

$$X_s(f) = \dots + \frac{1}{T} X(f + f_s) + \frac{1}{T} X(f) + \frac{1}{T} X(f - f_s) + \dots \quad (2.3)$$

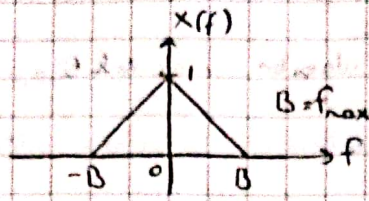
Denklemin (2.3) taslağı, üç abası çizimin sınıflandırıldığı şekil 2.6'da verilmiştir.

Şekil 2.6(a) da çizilen orijinal sinyal spektrumu $X(f)$ göz önüne alındığında, denklemin (2.3)'e göre örneklenmiş sinyal spektrumu, şekil 2.6(b)'de çizilir, şekil 2.6(c) temel bant spektrumunun ve kopyalarının, sadece birbirine bağlı olduğunu göstermektedir, ve son olarak, şekil 2.6(d)'de orijinal spektrum $\frac{1}{T} X(f)$ ve kopyaları,

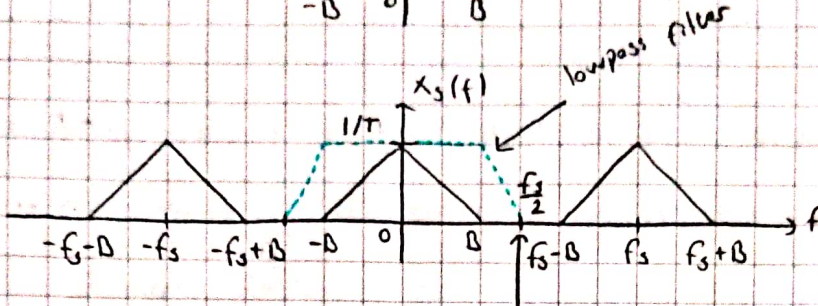
$\frac{1}{T} X(f-f_s), \frac{1}{T} X(f+f_s) \dots$ örtüşürler; yani örneklenen sinyal spektrumunda bir çok örtüşen kısım vardır.

$\Rightarrow$ Sürekli zamanlı sinyal $f_s < 2f_{max}$ ile örneklense örtüşme meydana gelir.

(A)

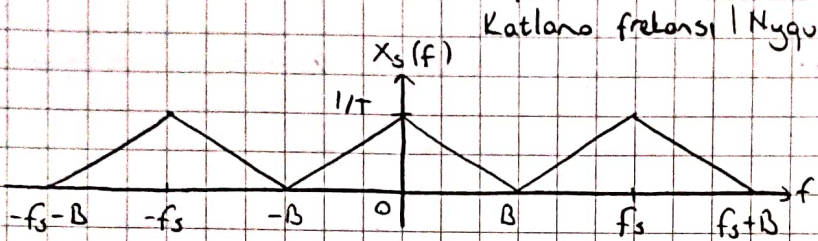


(B)

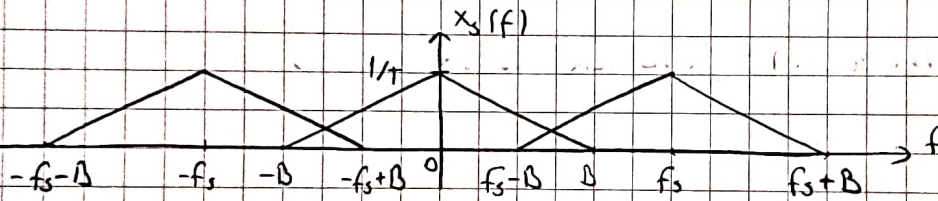


$f_s > 2f_{max}$ örtüşme yok
(No aliasing)

(C)



(D)



$f_s < 2B$ Örtüşme var
(Aliasing occurs)

Şekil 2.6. Örneklenen sinyal spektrumunun çizimleri.

Şekil 2.6'dan itibaren, örneklennmiş sinyal spektrumunun, orijin merkezindeki ölçeklenmiş temel bant spektrumundan ve $n=1, 2, 3, \dots$ 'ün her biri için $\pm n f_s$ (örnekleme oranının katları) frekanslarında merkezlenmiş kopyalarından oluştuğu aşiktir.

Orijinal sinyal spektrumunun yeniden elde edilmesi için bir ölçek geçiren filtreye uygulanacaksa aşağıdaki koşula dikkat edilmelidir:

$$f_s - f_{max} \geq f_{max} \quad (2.4)$$

(2.4)'ün eşitine bize (2.5)'i verir.

$$f_s \geq 2f_{max} \quad (2.5)$$

Denklem (2.5)'i radyan cinsinden yazacak olursak

$$\omega_s \geq 2\omega_{max} \quad (2.6) \text{ elde edilir.}$$

Düzenli bir şekilde örneklendirilmiş bir DSP sistemi için, örneklene hızı örneklenecek olan analog sinyalin en yüksek frekans bileşeninin en az iki katı olduğu sürece, bir analog sinyal n-kernel bir şekilde geri kazanılabilir. $f_s \geq 2 f_{max}$

Örneklendirilmiş sinyal bir olarak geçen filtre kullanılarak örneklendirilmiş değerleri orantılıyla geri kazanılabilir.

Örneklene frekansının yarısı $f_s/2$ genellikle Nyquist frekansı olarak adlandırılır. Örnekleme teorisi, f_s örneklene hızına sahip bir DSP sisteminin, spektral örtüşme yapmadan (örneklene) örneklene hızının yarısına kadar en yüksek frekanslı bir analog sinyali örneklemlenebileceğini gösterir. Bu nedenle, analog sinyal örneklendirilmiş verisinden n-kernel şekilde kurtarılabilir.

Ex. 2.1. Bir analog sinyalin aşağıdaki gibi verildiği varsayalım

$$x(t) = 5 \cos(2\pi \cdot 1000t) \quad t \geq 0 \text{ iken ve sinyal } 8000 \text{ Hz'de örneklenebilmektedir.}$$

a. Orijinal sinyalin spektrumunu çiz.

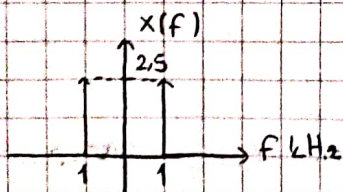
b. Örneklenen sinyalin spektrumunu 0 ile 20 kHz aralığında çiziniz.

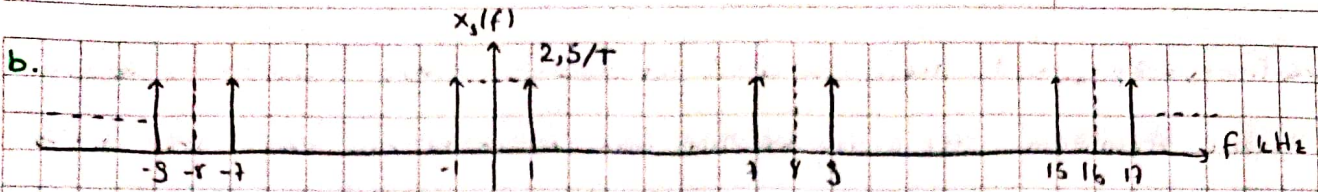
a. Analog sinyal tepe değerinin 5 ve frekansının 1000 Hz olduğu sinüzoidal bir sinyaldir. Euler açılımıyla yazarsak

$$5 \cos(2\pi \cdot 1000t) = 5 \left(\frac{e^{j2\pi \cdot 1000t} + e^{-j2\pi \cdot 1000t}}{2} \right) = 2,5 e^{j2\pi \cdot 1000t} + 2,5 e^{-j2\pi \cdot 1000t}$$

fourier serisi katsayıları $C_1 = 2,5$ ve $C_{-1} = 2,5$

Katsayıların büyüklüklerini kullanarak, iki taraflı spektrum şu şekilde çizilir.

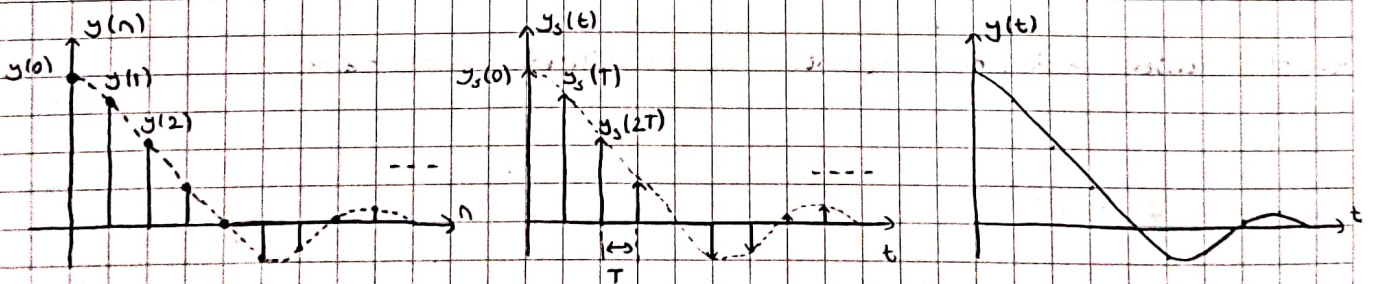
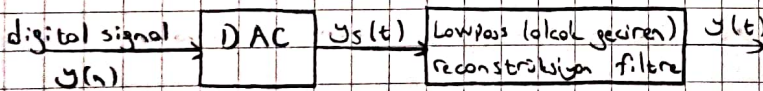




2.2. Signal Reconstruction (Örneklennmiş ayrık sinyalin eski haline dönüştürülmesi)

Bu bölümde örneklennmiş bir sinyalin analog haline geri dönüştürülmesi araştırılacaktır. Şekil 2.8'de gösterildiği gibi iki basitleştirilmiş adım söz konusudur. Öncelikle dijital olarak işlenmiş veri $y(n)$, "ideal impulse train $y_s(t)$ "'ye dönüştürülür, her darbenin dijital alı, $y(n)$ ile orantılı olarak genliğe sahip olduğu, ve iki ardışık darbe bir örnekleme süresi T ile ayrılır. İkinci olarak, analog yeniden yapılandırma filtresi geri kazanılmış analog sinyali elde etmek için ideal olarak geri kazanılmış örneklennmiş signale $y_s(t)$ uygulanır.

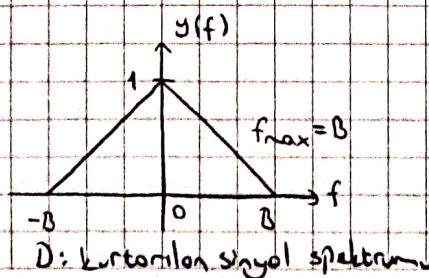
Sinyal rekonstrüksiyonunu incelemek için, DSP'siz durum için $y(n) = x(n)$ 'e izin veriniz, böylece yeniden yapılandırılmış örneklennmiş sinyal ve giriş örneklennmiş sinyalin aynı olması sağlanır. Yani $y_s(t) = x_s(t)$. Dolayısıyla, örneklenen sinyal $y_s(t)$ 'nin spektrumu, orijinal spektrum $X(f)$ ile aynı spektral içeriği içerir,



A: Dijital sinyal istendi

B: Örneklenen sinyal kurtarıldı

C: Analog sinyal kurtarıldı

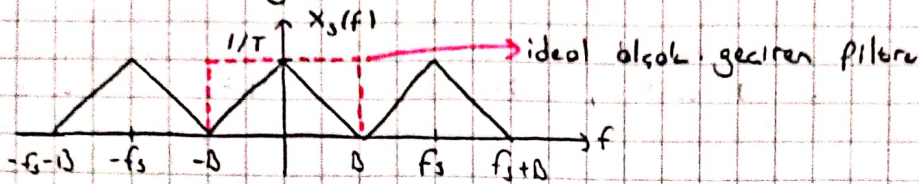


D: Kurtarılan sinyal spektrumu

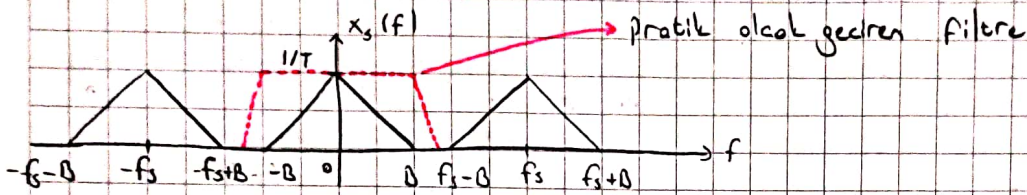
Şekil 2.8. Yeniden yapılandırma aşamasında sinyal notasyonu

Durum 1. $f_s = 2f_{max}$

Nyquist frekansının, $x(t)$ analog sinyalin max frekansına eşit olduğu Şekil 2.9'da gösterildiği gibi, analog sinyal spektrumunu geri kazanma için ideal bir alçak geçiren rekonstrüksiyon filtresi gereklidir, bu pratik bir durumdur.



Şekil 2.9. $f_s = 2f_{max}$ olduğunda örneklennmiş sinyalin spektrumu.



Şekil 2.10. $f_s > 2f_{max}$ olduğunda örneklennmiş sinyal yayfı.

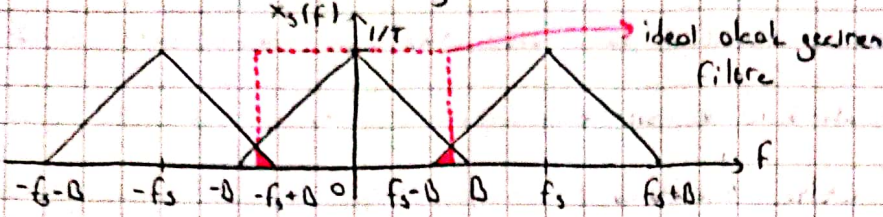
Durum 2. $f_s > 2f_{max}$

Bu durumda, Şekil 2.10'da gösterildiği gibi, temel bant spektrumunun en yüksek frekans kenarı ile birinci kopyalarının alt kenarı arasında bir ayır vardır. Bu nedenle, tüm görüntüleri reddetmek ve orijinal sinyal spektrumunu elde etmek için pratik bir düşük geçişli yarıdengeçirici (görüntü önleme) filtresi tasarlanabilir.

Durum 3. $f_s < 2f_{max}$

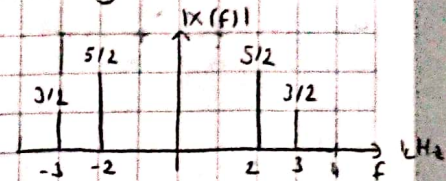
Durum 3'de Shannon örnekleme teoremi ihmal edilmektedir. Şekil 2.11'de görüldüğü gibi, orijinal temel bant spektrumu ve kopyalarının spektrumları arasında spektral bir örtüşme görülür. Bu görüntüleri kaldırmak için ideal bir alçak geçiren filtreye uygulanırsa bile, temel bantta bitişik kopyadan hala bazı acılma frekans bileşenleri vardır. Zaman alanında geri kazanılmış analog sinyal, örtüşme görüntü frekansı veya frekanslarından oluşabilir. Bu nedenle kurtarılan analog sinyal iyileştirilemez şekilde bozulmuştur.

Örnekleme frekansı: $f_{\text{ö}} = f_s - f$



Şekil 2.11. $f_s < 2f_{\text{max}}$ durumunda örneklennmiş sinyalin spektrumu.

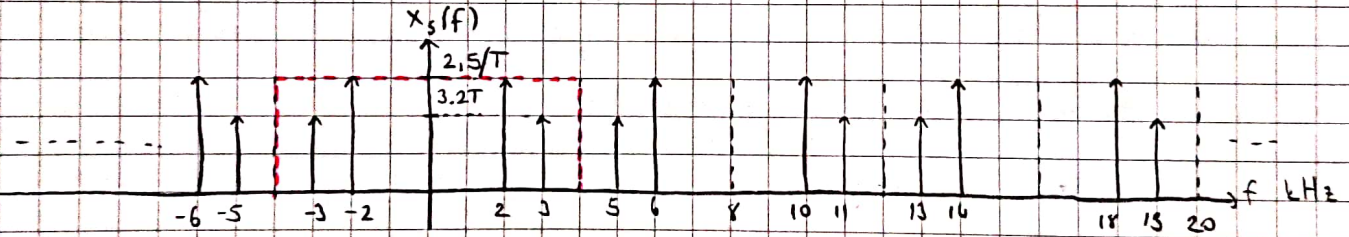
Ex: 2.2. $x(t) = 5 \cos(2\pi 2000t) + 3 \cos(2\pi 3000t)$, $t > 0$ için ve sinyal 8000 Hz ile örneklennmektedir.



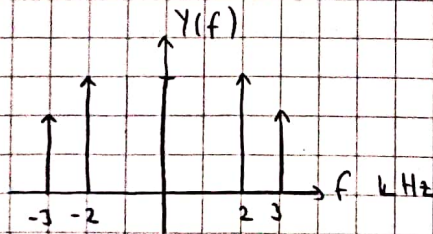
- Örneklenen sinyalin spektrumunu 20 kHz'e kadar çiziniz.
- Orjinal sinyali kurtarmak için örneklenen sinyali filtrelemek için 4 kHz kesme frekansına sahip ideal bir düşük geçiş filtresi kullanılırsa, kurtarılan analog sinyal spektrumunu çiziniz.

a. Euler eşitliğini kullanırsak

$$x(t) = \frac{5}{2} (e^{j2\pi 2000t} + e^{-j2\pi 2000t}) + \frac{3}{2} (e^{j2\pi 3000t} + e^{-j2\pi 3000t})$$

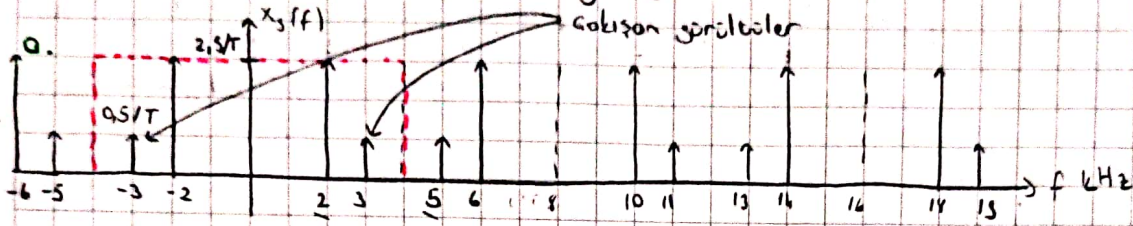


- (A)'daki spektrundan faydalanarak, örnekleme koşulu yerine getirilir. Bu nedenle bir yeniden alıştırma olarak geçen filtre kullanılırsa, geri kazanılan spektrum aşağıdaki gibi olur.



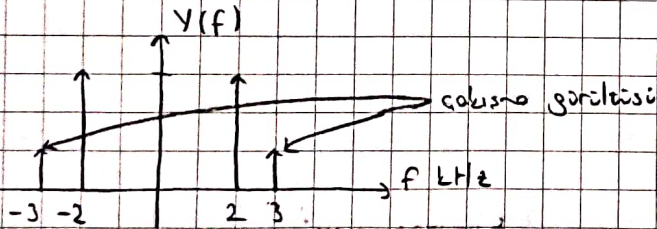
Ex. 2.3. Verilen analog sinyal $x(t) = 5 \cos(2\pi 2000t) + \cos(2\pi 5000t)$, $t > 0$ için ve sinyal 6000 Hz'de örnekleiyor.

- a) Örneklenen sinyalin spektrumunu 20 kHz'e kadar çiz.
- b) Orijinal sinyali kurtarmak için 6 kHz kesme frekansına sahip ideal bir alıcak geçen filtreye kullanılıyorsa kurtarılan analog sinyal spektrumunu çiz. (Bu durumda $y(n) = x(n)$)



$$x(t) = \frac{5}{2} (e^{j2\pi 2000t} + e^{-j2\pi 2000t}) + \frac{1}{2} (e^{j2\pi 5000t} + e^{-j2\pi 5000t})$$

b. Analog sinyalin max frekansı Nyquist frekansından daha büyük olduğundan + yani analog sinyalin max frekansı örnekleme oranından iki kat daha büyük olduğundan, örnekleme teoremi koşulu ihlal edilir. Bari kurtarılmış sinyal aşağıda gösterilmektedir. Burada çakışma görüldüğünün 3 kHz'de meydana geldiği görülmektedir.



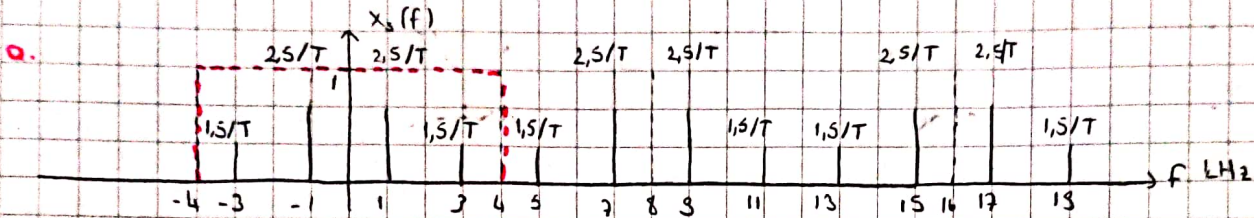
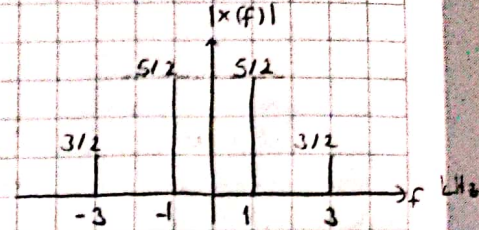
Ex: $x(t) = 5 \cos(2\pi 1000t) + 3 \sin(2\pi 3000t)$ ve örnekleme frekansı $f_s = 8000 \text{ Hz}$

a. Örnekleme işi için 20 kHz'e kadar olan spektrumunu çiziniz.

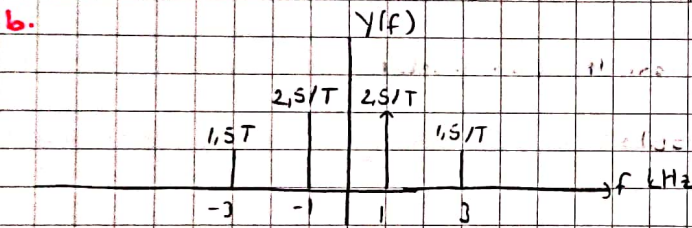
b. ideal olarak geçen süzgeç kullanılırsa $f_c = 4 \text{ kHz}$ (kesim frekansı) faktör elde edilen isaretin spektrumunu çiziniz.

Euler eşitliğine göre yazarsak

$$x(t) = \frac{5}{2} (e^{j2\pi 1000t} + e^{-j2\pi 1000t}) + \frac{3}{2j} (e^{j2\pi 3000t} - e^{-j2\pi 3000t})$$



-taraf, + tarafın simetrisi olur.



2.2.1. Örnekleme ile ilgili Pratik Değerlendirmeler

Pratikte analog sinyalin içerisinde Nyquist frekansından ($f_s/2$) çok daha yüksek frekanslı gürültüler olabilir. Analog sinyali sınırladıkları için analog geçen bir filtreye olan anti-aliasing filtresi kullanılır.

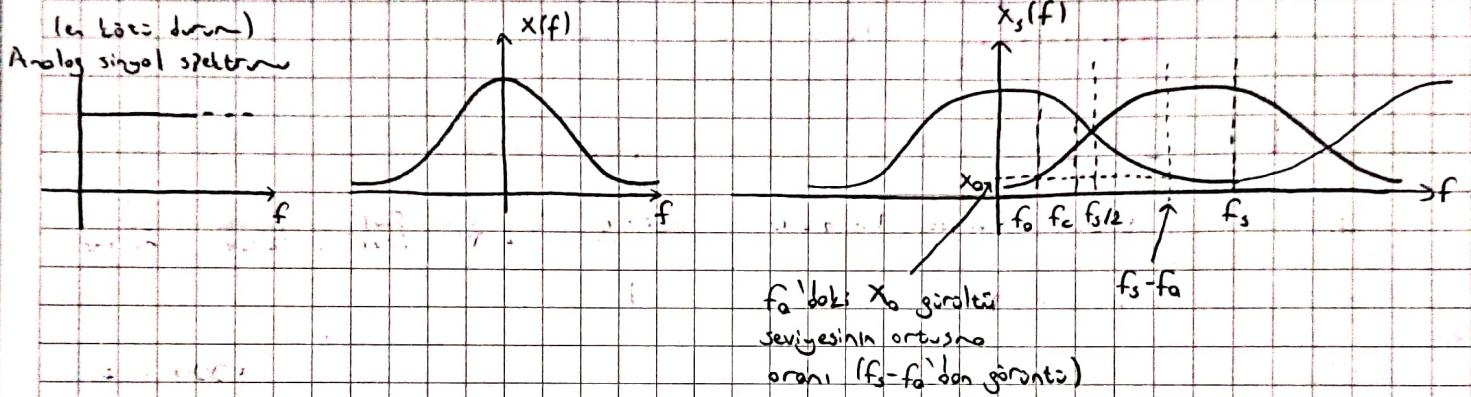
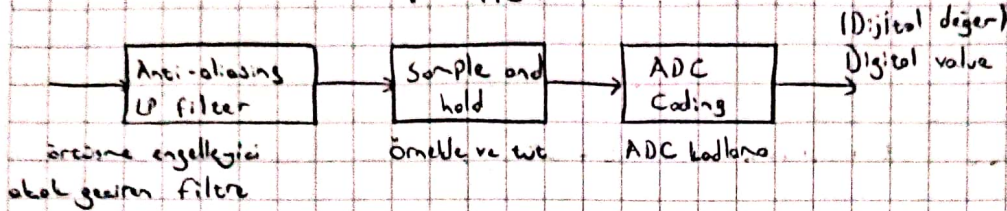
Örneklenecek olan analog sinyalin doğrudan frekans spektrumuna sahip olduğu a kötü durum dikkate alındığında, bant sınırlı spektrum $X(f)$ ve örnekleme spektrum $X_s(f)$, örnekleme sinyali her bir kopya seklinin, selül 2.16'da tasvir edildiği tıy f, kenar yumuşatma filtresi büyüklüğü frekans tepkisi ile eşitir.

Örneğe göre, daha düşük dereceli analog geçen filtreye kullanılarak veya örnekleme oranını artırarak da kontrol edebiliriz.

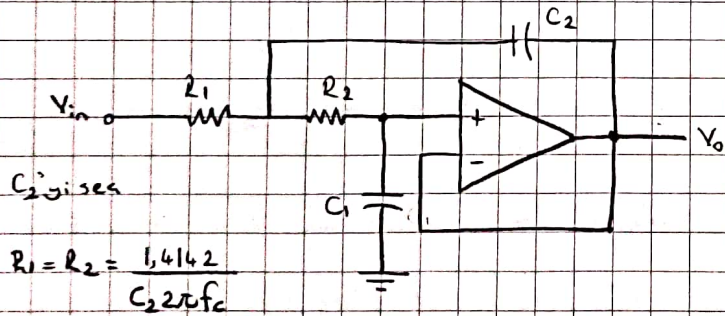
Örneğin öncelikle bir butterworth filtresi kullanıyoruz. Bu yöntem, Cheby-shev filtresi gibi diğer filtre türlerine de genişletilebilir. Butterworth büyüklüğü frekans cevabı n sırası ile verilir.

(Filtrenin frekans tepkisi) $H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$ (2.7)

f_c : kesim frekansı,
 n : filtre mertebesi



Şekil 2.16. Örneklenen analog sinyalin, pratik bir anti-aliasing filtreyle spektrumu



Şekil 2.17. İkinci dereceden birin

Sallen-Key düşük geçişli filtre karanlı

$R_1 = R_2 = \frac{1,4142}{C_2 2\pi f_c}$

$C_1 = \frac{1}{R_1 R_2 C_2 (2\pi f_c)^2}$

2. mertebe bir butter-worth filtresinin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$H(s) = \frac{(2\pi f_c)^2}{s^2 + (1,4142)(2\pi f_c)s + (2\pi f_c)^2}$ (2.8)

ve $H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^4}}$ (2.9)

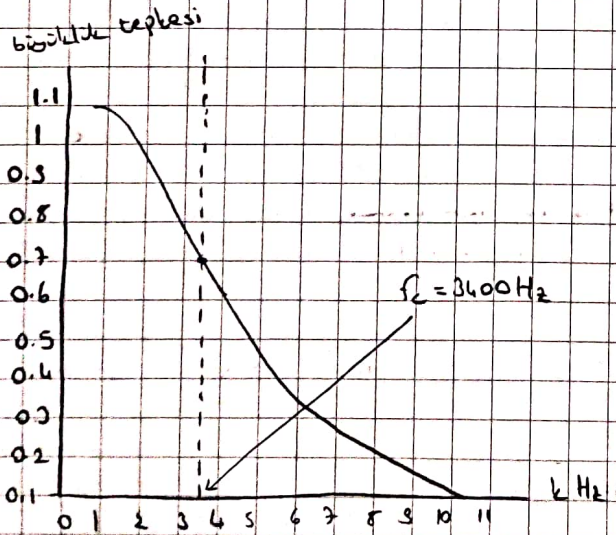
Bir sallen-key topolojisi kullanan bir birtan kazanç ikinci dereceden düşük geçişli filtre şekli 2.17'de gösterilmiştir. Devre transfer fonksiyonunun katsayılarının denklem (2.10)'daki ikinci dereceden Butterworth lowpass transfer fonksiyonuyla eşleştirilmesi şekil (2.17) de gösterilen tasarım formüllerini veriyor. Şekilde listelenen formülleri kullanarak diğer elemanları belirleyebilirsiniz.

$$\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{(2\pi f_c)^2}{s^2 + 1,4142 \times (2\pi f_c) s + (2\pi f_c)^2} \quad (2.10)$$

⇒ Örnek olarak, 3,4 kHz kesme frekansı için $C_2 = 0,01 \mu F$ seçilerek,

$$R_1 = R_2 = \frac{1,4142}{C_2 2\pi f_c} = 6620 \Omega \quad \text{ve} \quad C_1 = \frac{1}{R_1 R_2 C_2 (2\pi f_c)^2} = 0,005 \mu F$$

Şekil 2.18 filtrenin mutlak kazancının çizildiği büyüklük frekans cevabını göstermektedir. Gördüğümüz gibi, mutlak zayıflama 3400 Hz'de 0,7 seviyesinde başlar ve 6000 Hz'de 0,3'e düşer. İdeal olarak, örneklene oranınız 8000 Hz ise, kazancının 4000 Hz'den sonra sıfır olmasını istiyoruz. Pratik olarak, konusursak, örneğine bir dereceye kadar gerçekleştireceğiz.



Şekil 2.18: İkinci dereceden Butterworth alçak geçiren filtrenin büyüklüğü frekans tepkisi

Şekil 2.16'ya göre, Butterworth büyüklüğü fonksiyonunun simetrisini ve ilk kopyasını kullanarak taktıra gürültü seviyesinin yüzdesini türetebiliriz.

$$\text{örtünme gürültü seviyesi } \% = \frac{X_a}{|X(f)|_{f=f_0}} = \frac{|H(f)|_{f=f_s-f_0}}{|H(f)|_{f=f_0}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f_c}\right)^{2n}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_s-f_0}{f_c}\right)^{2n}}} \quad 0 \leq f \leq f_c \quad (2.11)$$

Dallen (2.11) ile, örtüşme gürlüğü seviyesini tahmin edebilir veya örtüşme gürlüğü gözdesi gereksinimini karşılamak için üst düzey örtüşme ölçeyi bir filtre seçebiliriz.

Ex. 2.4. Şekil 2.16 ile 2.18'de gösterilen DSP göz örne alındığında, 8000 Hz'lik bir örnekleme oranının kullanıldığı ve anti-aliasing (corpuscula ölçeyici) filtresinin, 3,4 kHz'lik bir kesme frekansına sahip ikinci dereceden bir Butterworth alkol geçiren filtresi olduğunu,

a. kesme frekansındaki örtüşme seviyesinin yüzdeisini belirleyin.

b. $f_0 = 1000$ Hz'deki örtüşme seviyesini hesaplayın.

a. $f_s = 8000$ Hz, $f_c = 3400$ Hz ve $n = 2$

aliasing
frequency $\leftarrow f_0 = f_c = 3400$ Hz

$$\text{örtüşme gürlüğü seviyesi \%} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f_c}\right)^{2n}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_s - f_0}{f_c}\right)^{2n}}} \quad 0 \leq f \leq f_c \Rightarrow \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{3,4}{3,4}\right)^{2 \times 2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{8 - 3,4}{3,4}\right)^{2 \times 2}}} = \frac{1,4142}{2,0858} = \%67,8$$

b. $f_0 = 1000$ Hz

$$\text{örtüşme gürlüğü seviyesi \%} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{3,4}\right)^{2 \times 2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{8 - 1}{3,4}\right)^{2 \times 2}}} = \frac{1,03007}{4,3551} = \%23,05$$

Ex. 2.5. a. Şekil 2.16 ile 2.18'de gösterilen DSP sistemi göz örne alındığında, 16000 Hz'

lik bir örnekleme oranının kullanıldığı ve örtüşme ölçeyici filtresinin ikinci dereceden

Butterworth alkol geçiren filtresi olduğu ve 3,4 kHz'lik bir kesme frekansına sahip olduğu

örtüşme seviyesinin %'sini bul.

a. $f_s = 16000$ Hz, $f_c = 3400$ Hz ve $n = 2$

$f_0 = f_c = 3400$ Hz

$$\text{örtüşme gürlüğü seviyesinin yüzdeisi} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f_c}\right)^{2n}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_s - f_0}{f_c}\right)^{2n}}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{3,4}{3,4}\right)^{2 \times 2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{16 - 3,4}{3,4}\right)^{2 \times 2}}} = \frac{1,4142}{13,7633} = \%10,26$$

Örnek 2.4 ile karşılaştırıldığında örnekleme frekansını arttırmak, örtüşme gürlüğü seviyesini azaltır.

Aşağıdaki örnek kesir yusutma filtresinin nasıl seçileceğini gösterir.

Ex. 2.6. $f_s = 40 \text{ kHz}$ olan bir örtüne öleyici filtre kesme frekansı $f_c = 8 \text{ kHz}$ olan bir Butterworth alak geiren filtredir ve kesme frekansındaki örtüsünün %1'den az olması istenmektedir. örtüne öleyici alak geiren filtresinin seviyesi belirlenir.

$f_s = 40000$, $f_c = 8000$, ve $f_0 = 8000 \text{ Hz}$, aşağıdaki filterlerin herbirinin örtün filtre seviyesini bulunuz.

$$n=1 \Rightarrow \text{örtüne girtü seviyesi \%} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f_c}\right)^{2n}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_s - f_0}{f_c}\right)^{2n}}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{8}{8}\right)^{2 \times 1}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{40 - 8}{8}\right)^{2 \times 1}}} = \frac{1.4142}{\sqrt{1 + 16}} = \% 34.3$$

$$n=2 \Rightarrow \text{örtüne girtü seviyesi \%} = \frac{1.4142}{\sqrt{1 + 16^2}} = \% 8.82$$

$$n=3 \Rightarrow \text{örtüne girtü seviyesi \%} = \frac{1.4142}{\sqrt{1 + 16^3}} = \% 2.21$$

$$n=4 \Rightarrow \text{örtüne girtü seviyesi \%} = \frac{1.4142}{\sqrt{1 + 16^4}} = \% 0.55 < \% 1$$

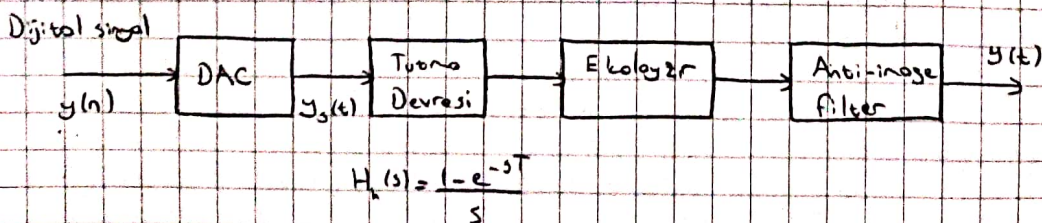
örtüne girtü seviyesinin %1'den küçük olması için $n=4$ seçilir.

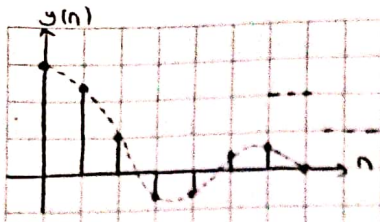
2.2.2. Anti-image Filtre ve Ekolayzör

Pratik bir DSP sistemi için analog sinyal geri kazanımı şekil 2.13'da gösterilmiştir. Şekil 2.13'de gösterildiği gibi, DAC birimi islenmiş sinyali $y(n)$ örneklens bir signale $y_s(t)$ dönüştürür ve ardından tutma devresi $y_H(t)$ örnek ve tutma devresini üretir. Tutma devresinin transfer fonksiyonu,

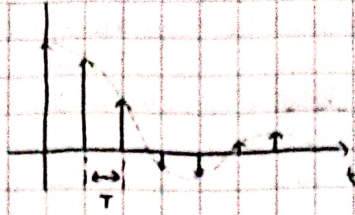
$$H_h(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (2.12)$$

Tutma devresi
frekans tepkisi $\Rightarrow H_h(\omega) = e^{-j\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \quad (2.13) \quad \pi = \frac{\omega T}{2} = \frac{2\pi f T}{2} \Rightarrow f = \frac{1}{T}$

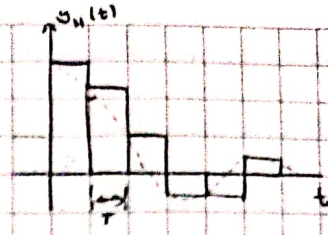




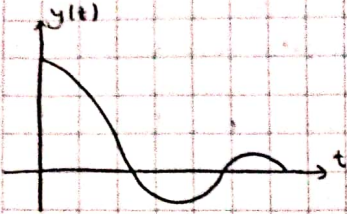
(A)



(B)



(C)



(D)

Şekil 2.13. a. İşlenmiş dijital sinyal

b. Kurulan ideal örnekleme sinyal

c) Kurulmuş, örnekle ve tut

d. Kurulan analog sinyal

Büyüklik ve faz tepkileri

$$|H_n(\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right| = \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \quad 2.14$$

$$\angle H_n(\omega) = -\omega T/2 \quad 2.15$$

where $x = \omega T/2$. In terms of Hz, we have

$$H_n(f) = \left| \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right| \quad 2.16$$

$$\angle H_n(f) = -\pi f T \quad 2.17$$

Tutma derecesinden kaynaklı bozulmanın oranı aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\% \text{ bozulma (distortion)} = (1 - H_n(f)) \times \%100 = \left(1 - \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right) \times \%100 \quad 2.18$$

? Ex. 2.7. 8 kHz örnekleme frekansına sahip bir DSP sistemi ve DAC'den sonra kulanılan bir tutma devresi verildiğinde

a. 3,4 kHz frekansındaki bozulma gradisini belirleyin.

b. Bozulma gradisini 1 kHz'de belirleyin.

$$a. fT = 3400 \times 1/8000 = 0,425$$

$$\% \text{ bozulma} = \left(1 - \frac{\sin(0,425\pi)}{0,425\pi} \right) \times 100 = \%27,17$$

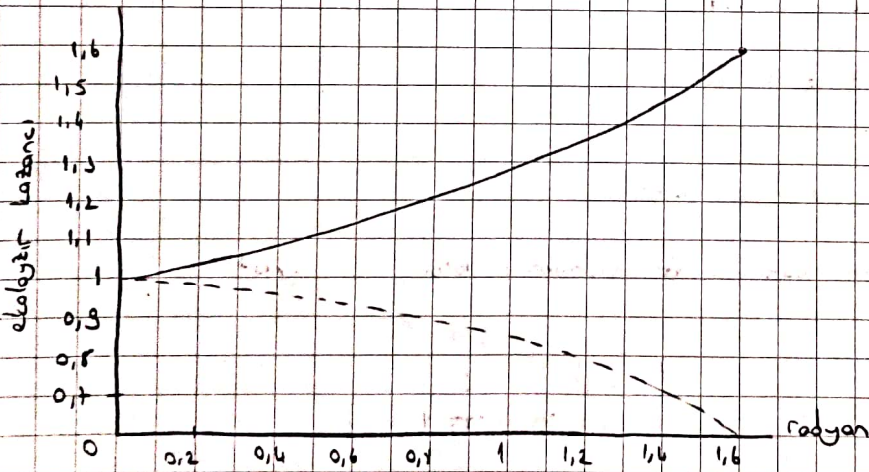
$$b. fT = 1000 \times 1/8000 = 0,125$$

$$\% \text{ bozulma} = \left(1 - \frac{\sin(0,125\pi)}{0,125\pi} \right) \times 100 = \%2,55$$

⇒ Tutma devresinin etkisi aşağıdaki yöntemlerle azaltılabilir

1. Tutma devresinin tersi olan bir frekans tepkisine sahip ekolayıcı kullanılabilir.
2. Oversampling ve interpolation kullanılarak örnekleme hızı artırılabilir, ve tutma devresinin etkisi de azaltılmış olur.
3. Sayısal bir ön ekolayıcı (pre-equalizer) kullanılabilir. Ön ekolayıcının frekans tepkisi tutma devresinin tersi olmalıdır.

Ex. 2-8. Örnekleme hızı 16000 Hz olan bir DSP sistemine verilen görüntü örnekleme filtresinin ve şekil 2.24'te gösterildiği gibi görüntü örnekleme filtresinin teknik özelliklerinin belirli frekansını ve sınırlarını belirleyin.



Şekil 2.22. Örnek tutma işleminin neden olduğu bozulmayı örnekleme için ideal ekolayıcı büyüklüğü frekans tepkisi.

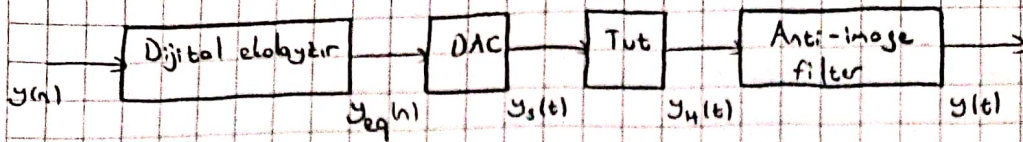
Tasarım gereksinimleri

izin verilen max kazanca (genlik) değişimi 0 ila 3000 Hz = 2 dB

13000 Hz'de 33 dB zayıflama (rejection)

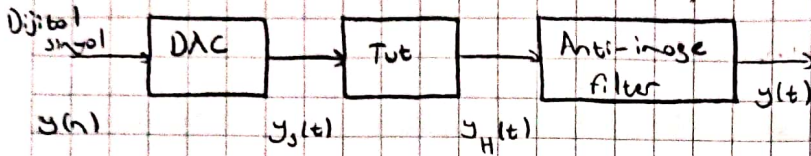
Butterworth filtre

⇒ ilk olarak spektral sınırlama etkileri hesaplanır $f = 3000 \text{ Hz}$ ve $f = 13000 \text{ Hz}$ 'de.



2.23. Dijital ekolayıcı kullanılarak analog uygulama

⇒ Burada ekolayıcı olarak alınan Cümlü hold (tutma) devresinin etkisini tam olarak görebilmek için ekolayıcı kaldırılabilir.



Şekil 2.24: Örnek 2.8 için DSP

kurtarma sistemi

$$f = 3000 \text{ Hz}, f_T = 3000 \times 1/16000 = 0,1785$$

$$\text{kazanc} (\text{gain}) = \frac{\sin(0,1785\pi)}{0,1785\pi} = 0,8484 = 20 \log(0,8484) = -0,46 \text{ dB}$$

$$f = 13000 \text{ Hz}, f_T = 13000 \times 1/16000 = 0,8125$$

$$\text{kazanc} = \frac{\sin(0,8125\pi)}{0,8125\pi} = 0,2177 = -13 \text{ dB}$$

Bu kazanç, zayıflama ihtiyacına karşılık olacaktır.

Bu nedenle, görüntü önleme filtresinin tasarım gereksinimleri şunlardır.

Butterworth alçak geçiren filtre

İzin verilen max kazanç değişimi 0-3000 Hz = (2 - 0,46) = 1,54 dB

(33-13) = 20 dB rejection at frequency 13000 Hz

bu iki denklemden tekni olarak zorundayız

$$\begin{cases} 20 \log \left(1 + \left(\frac{3000}{f_c} \right)^{2n} \right)^{1/2} \leq 1,54 \text{ dB} \Rightarrow \left(\frac{3000}{f_c} \right)^{2n} = 10^{0,154} - 1 \\ 20 \log \left(1 + \left(\frac{13000}{f_c} \right)^{2n} \right)^{1/2} \geq 20 \text{ dB} \Rightarrow \left(\frac{13000}{f_c} \right)^{2n} = 10^2 - 1 \end{cases}$$

zayıflama

20 log v / 10 log dopar

bu iki denklemin verisini alırsak

$$\left(\frac{13000}{3000} \right)^{2n} = \frac{10^2 - 1}{10^{0,154} - 1}$$

0-3000 Hz arası = 2 dB

şurada verilen değer.

sonra $n = \frac{1}{2} \frac{\log(10^2 - 1)}{\log(\frac{13000}{3000})} = 1,86 \approx 2$

Son olarak kesme frekansını bulalım. Birinci ve ikinci denklemlerden 2 adet f_c bulup küçük olanı alacağız

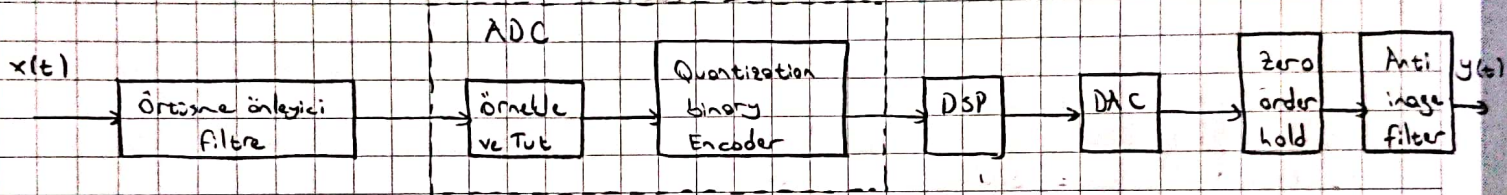
$$f_c = \frac{13000}{(10^2 - 1)^{1/2n}} = \frac{13000}{(10^2 - 1)^{1/4}} = 4121,30 \text{ Hz}$$

$$f_c = \frac{3000}{(10^{0,154} - 1)^{1/2n}} = \frac{3000}{(10^{0,154} - 1)^{1/4}} = 3714,23 \text{ Hz}$$

küçük olanı alacağız

$$f_c = 3714,23 \text{ Hz}$$

2.3. Analog Dijital Dönüşüm, Dijital Analog Dönüşüm ve Kuantalama



2.26: Bir DSP sistemi için bir blok diyagram

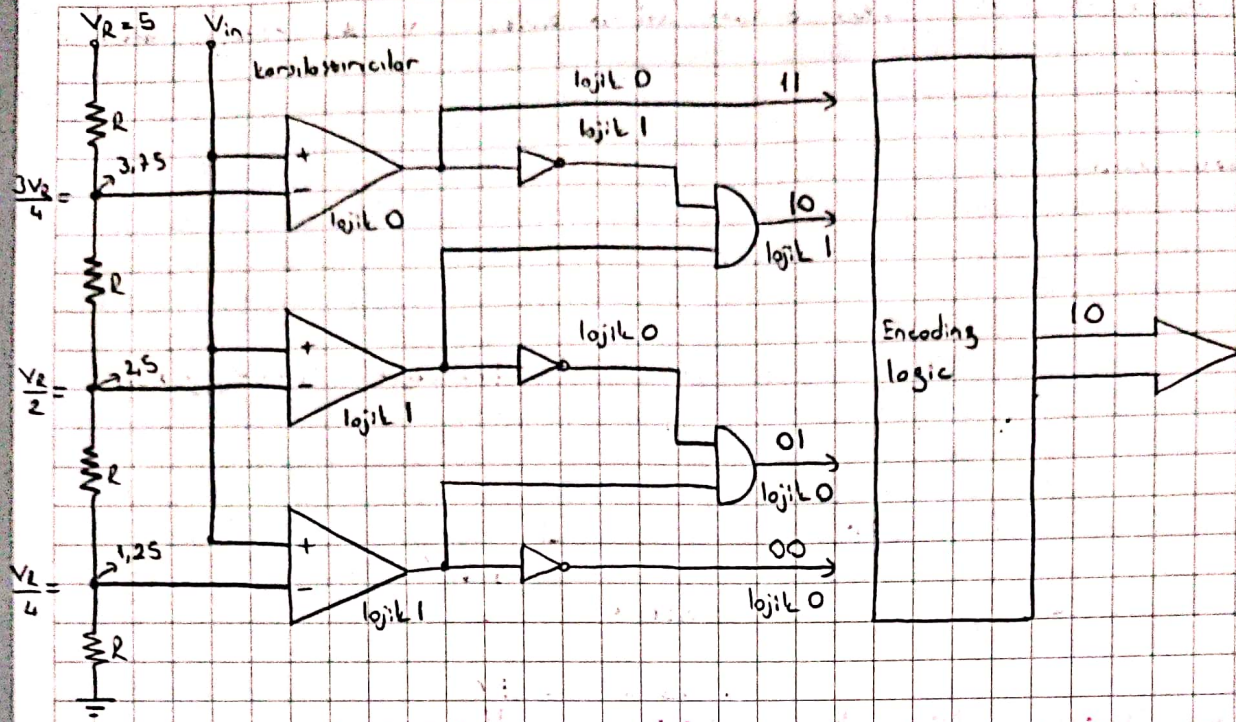
ADC'yi uygulamanın birçok yolu vardır. En yaygın olanları

Flash ADC,

Ardışık yaklaşım ADC ve

Sigma-delta ADC

Bu ders kapsamında örnek olarak 2 bitlik flash ADC incelenecektir. Şekil 2.27'de gösterildiği gibi, 2 bitlik flash ADC birimi, eşit değer dirençleri, bir dizi karşılaştırıcı ve mantık birimlerinden oluşur. bir seri referans voltajından oluşur. Örnek olarak, şekildaki referans voltajları 1,25V, 2,5V, 3,75V ve 5V'dır. Analog bir örnek tutma voltajı $V_{in} = 3$ voltu ise, altı tane karşılaştırıcı her bir lojik 1'i verecektir. Mantık birimleri aracılığıyla, sadece 10 etiketli satır aktif olarak yükselir ve satırların geri kalanı aktif olarak düşer. Bu nedenle, kodlama mantık devresi 2 bitlik bir 10'luk ikili kod üretir.

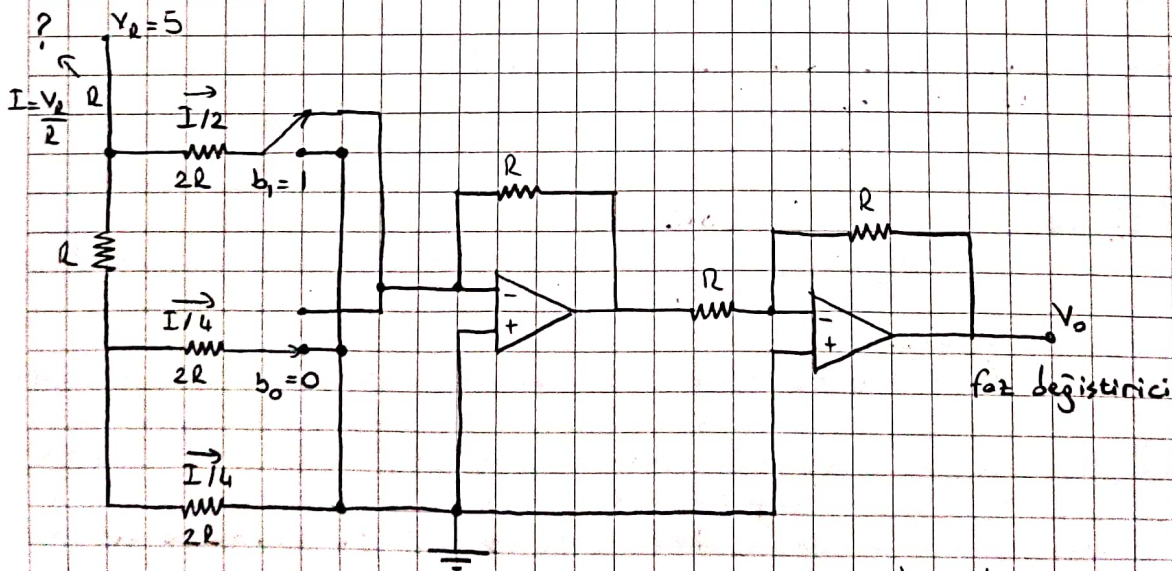


Şekil 2.27: 2 bitlik bir flash ADC örneği

Flash ADC, tüm bitleri aynı anda alındığından, yüksek dönüşüm hızı avantajı sunar.

$$V_o = V_R \left(\frac{1}{2^1} b_1 + \frac{1}{2^2} b_0 \right)$$

buradaki b_1 ve b_0 , ilki bitlik ilki koddaki bitlerdir, b_0 en anlamsız bittir (LSB).



Şekil 2.28: R-2R ladder DAC

b_1	b_0	$V_R = 5V$
0	0	0 V
0	1	1,25 V
1	0	2,75 V
1	1	3,75 V

Ex.2.9. 3 bitli ADC kuantalan 0 ile 5V'ye arasında değişen analog girişi kabul ettiğini varsayarak, aşağıdakileri belirtin;

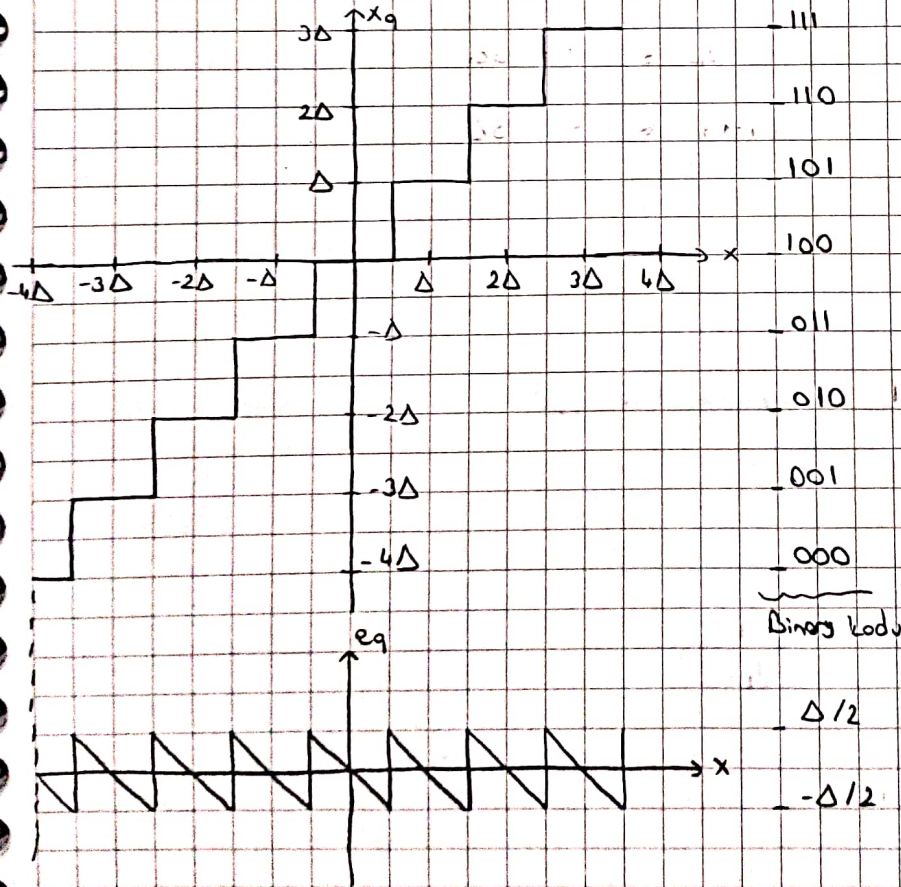
a. nicelene sergesi sayısı

b. nicelleştiricinin veya çözünürlüğün adım büyüklüğü

Tablo 2.1 3 bit tek kutuplu kuantizer için miktar tablosu (Adım büyüklüğü $= \Delta = \frac{(X_{max} - X_{min})}{2^3}$,

$X_{max} = \text{max gerilim}$, $X_{min} = 0$)

Binary Kod	Kuantalama sergisi $X_q(V)$	Giris Signal aralığı
0 0 0	0	$0 \leq x < 0,5\Delta$
0 0 1	Δ	$0,5\Delta \leq x < 1,5\Delta$
0 1 0	2Δ	$1,5\Delta \leq x < 2,5\Delta$
0 1 1	3Δ	$2,5\Delta \leq x < 3,5\Delta$
1 0 0	4Δ	$3,5\Delta \leq x < 4,5\Delta$
1 0 1	5Δ	$4,5\Delta \leq x < 5,5\Delta$
1 1 0	6Δ	$5,5\Delta \leq x < 6,5\Delta$
1 1 1	7Δ	$6,5\Delta \leq x < 7,5\Delta$



Δ : adım büyüklüğü
 X_q : kuantalama değeri çıkışı

hata $-\frac{\Delta}{2}$ ile $\frac{\Delta}{2}$ arasında değişir

Şekil 2.30: Bipolar nicelleştiricinin özellikleri

c. Analog gerilim 3,2 Volt olduğunda nicelleştirme serisi:

d. ADC tarafından üretilen ikili kod

Aralık 0-5 volt aralığında olduğundan ve 3 bit ADC kullanıldığından

$x_{min} = 0$ Volt, $x_{max} = 5$ Volt ve $m = 3$ bit

$$\Delta = \frac{(x_{max} - x_{min})}{L} \quad (2.19)$$

$$L = 2^m \quad (2.20)$$

$$\hat{i} = \text{round} \left(\frac{x - x_{min}}{\Delta} \right) \quad (2.21)$$

$$x_q = x_{min} + \hat{i} \Delta, \quad \hat{i} = 0, 1, \dots, L-1 \text{ için} \quad (2.22)$$

a. Denklem (2.20) kullanarak, aşağıdaki gibi nicelleştirme seviyelerinin sayısını bulalım.

Binary kod	Kuantalama serisi x_q (V)	Giriş sinyal aralığı (V)
0 0 0	-4Δ	$-4\Delta \leq x < -3,5\Delta$
0 0 1	-3Δ	$-3,5\Delta \leq x < -2,5\Delta$
0 1 0	-2Δ	$-2,5\Delta \leq x < -1,5\Delta$
0 1 1	-1Δ	$-1,5\Delta \leq x < -0,5\Delta$
1 0 0	0	$-0,5\Delta \leq x < 0,5\Delta$
1 0 1	Δ	$0,5\Delta \leq x < 1,5\Delta$
1 1 0	2Δ	$1,5\Delta \leq x < 2,5\Delta$
1 1 1	3Δ	$2,5\Delta \leq x < 3,5\Delta$

$$L = 2^m = 2^3 = 8$$

L: nicelene (örneklene) seviyelerinin sayısı

b. (2.19) uygulandığında verim

$$\Delta = \frac{5-0}{8} = 0,625 \text{ volt}$$

c. $x = 3,2 \frac{\Delta}{0,625} = 5,12 \Delta$ denklem (2.21) den

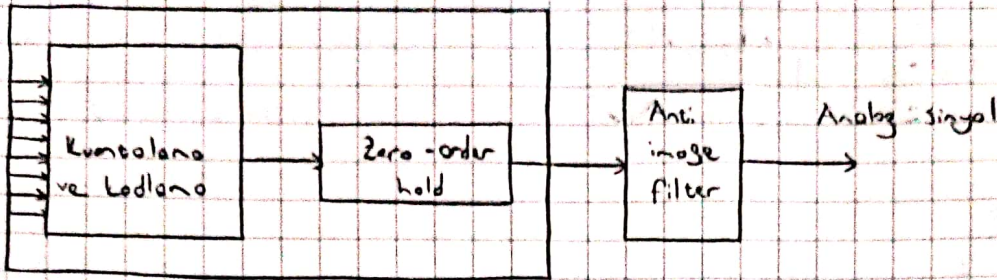
$$\hat{i} = \text{round} \left(\frac{x - x_{min}}{\Delta} \right) = \text{aralık } (5,12) = 5$$

estetik (2.22) den nicelene serisini şu şekilde belirleriz

$$x_q = 0 + 5\Delta = 5 \times 0,625 = 3,125 \text{ volt}$$

d. ikili kod, şekil 2.23 veya tablo 2.1'den 1 0 1 olarak belirlenir.

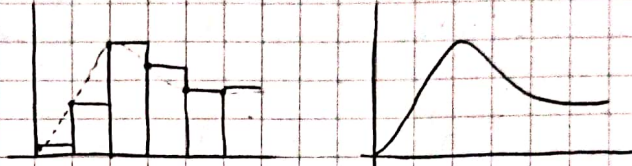
Sekilde bipolar kuantalayanın giriş çıkış ilişkisi gösterilmektedir. Gerçek örnek değeri ile kuantalanmış örnek değeri arasındaki fark $e_q = x - x_q$ kuantalama hatası olarak tanımlanır.



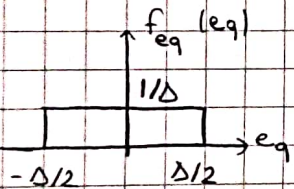
DAC dönüşümü

İkili Kod

0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0	1



Kuantalama gürültüsü adım büyüklüğü olan Δ 'ya göre $(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})$ arasında değer alır. Örneklenen sinyalin herhangi bir değer aralığında eşit olasılıkla değer aldığı varsayılırsa kuantalama gürültüsü $-\Delta/2, \Delta/2$ arasında düzgün dağılımlı olur.



kuantalama gürültüsünün PDF'si

$E[e_q^2]$: Kuantalama gürültüsünün gücü

$$E[e_q^2] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta} e_q^2 de_q = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$SNR = \frac{\text{İşaret Gücü}}{\text{Kuantalama gürültüsü gücü}} = \frac{E[s^2]}{E[e_q^2]} = \frac{E[s^2]}{\Delta^2/12} = \frac{S_{rms}^2}{\Delta^2/12}$$

$$SNR(dB) = 10 \log \left(\frac{S_{rms}^2}{\Delta^2/12} \right) = 10 \log \left(\frac{S_{rms}^2 \cdot 12}{\Delta^2} \right) = 10 \log 12 + 20 \log \left(\frac{S_{rms}}{\Delta} \right)$$

$$= 10,78 + 20 \log \left(\frac{S_{rms}}{\Delta} \right)$$

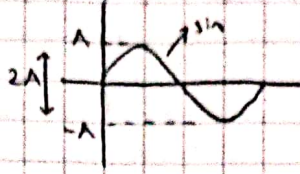
Ex: 0-5V aralığında değerler alan 3 bitlik ADC'nin kuantalama adım büyüklüğünü bul.

$$\text{Seviye sayısı} = 2^3 = 8 \quad \Delta = \frac{5}{8} = 0,625$$

+ **Ex:** Kuantalanacak analog sinyal $x(t) = A \sin 2\pi 1000t$ olsun. n bitlik bipolar kuantalayıcı kullanılacağına göre $SNR (dB) = ?$

$$E[e_q^2] = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\Delta = \frac{2A}{2^m}$$



$$\Delta = \frac{2A}{2^m} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4A^2}{2^{2m} \cdot 12}$$

isaretin gücü $E[s^2(t)] = \frac{A^2}{2} \Rightarrow SNR = \frac{A^2}{2} \cdot \frac{2^{2m} \cdot 12}{4A^2}$

$$SNR = \frac{E[s^2(t)]}{E[e_q^2]} = \frac{2^{2m} \cdot 12}{8}$$

$$SNR (dB) = 10 \log\left(\frac{3}{2}\right) + 20m \log(2)$$

Ex: Bir konuşma sinyali için sinyalin RMS ($\sqrt{E[x^2]}$) (root mean square) değerinin mutlak maksimum değerine $|x_{max}|$ oranı biliniyorsa $\left(\frac{x_{rms}}{x_{max}}\right)$: biliniyor. n bitlik ADC için SNR 'yi hesaplayın.

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{2^m} = \frac{2|x_{max}|}{2^m}, \quad \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4|x_{max}|^2}{2^{2m} \cdot 12}$$

$$SNR = \frac{x_{rms}^2}{\Delta^2/12} = \frac{x_{rms}^2 \cdot 2^{2m} \cdot 12}{4|x_{max}|^2} = \frac{x_{rms}^2}{|x_{max}|^2} \cdot 2^{2m} \cdot 3$$

1 periyot

?

Ex: $SNR (dB) = 10 \log(3) + 20m \log(2) + 20 \log(x_{rms}/|x_{max}|)$

$$T_0 = 1/100 \cdot 10^{-3}$$

% $x = 3 \sin(2\pi 1000t)$ kuantalanacak işaret

% m ; % dışarıdan girilen bir değer olsun

$n = 16$; % 16 bitlik kuantalayıcı

$f_s = 8000$; % örnekleme frekansı

$T = 1/f_s$; % örnekleme periyodu

$t = 0; T: 10^{-3}$; % sinyalin bir periyoduna ilişkin örnekleme zamanı

$x = 3 * \sin(2 * \pi * 1000 * t)$;

$\Delta = 6/(2^m)$; % kuantalama adım büyüklüğü

$x_{bagut} = \text{length}(x)$;

for $k = 1 : x_{bagut}$

adim_sayisi = round(($x(k) - (-3)$)/ Δ);

$x_q(k) = -3 + (\text{adim_sayisi} * \Delta)$; % kuantalanmış değer

end;

$$e_q = x - x_0;$$

$$P_{\text{hata}} = \text{mean} (e_q.^2); \quad \% \text{ kvantolaama gäreläusä gäzä}$$

$$P_{\text{signäl}} = \text{mean} (x.^2);$$

$$\text{SNR} = P_{\text{signäl}} / P_{\text{hata}};$$

$$\text{SNR (dB)} = 10 * \log_{10} (\text{SNR});$$

Sf 45-46 färläli ki
mätläb ärnegi var

3. Dijital Sinyaller ve Sistemler

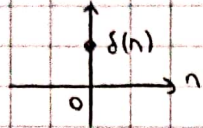
3.1.1. Ayrik Zamanlı Sinyaller

$x(n)$: Ayrik zamanlı sinyal n index değeri $n \in \mathbb{Z}$

Temel sinyaller

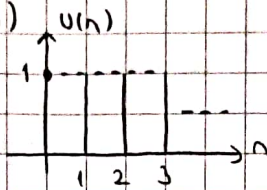
$\delta(n)$: birim impuls (unit impulse) isareti

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

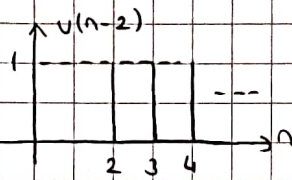
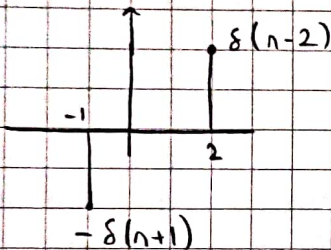


Birim basamak isareti (unit step) $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

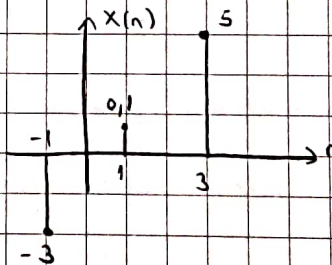


Ex:



Ex: $x(n) = 0,1 \delta(n-1) + 5 \delta(n-3) - 3 \delta(n+1)$

$$[-3 \ 0 \ 0,1 \ 0 \ 5]$$



Ayrik Zamanlı Sinyallerin Üretilmesi

$$x(n) = x(t=nT)$$

Ex: a. $x(t) = 10e^{-500t} u(t)$
b. $x(t) = 10 \sin(200\pi t) u(t)$

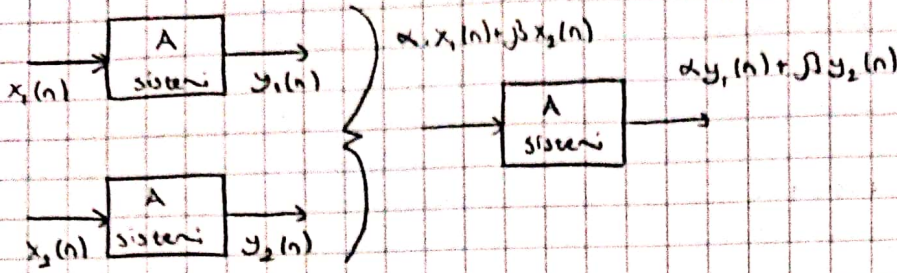
$$T = 125 \mu s \Rightarrow x(n) = ?$$

a. $x(n) = 10 \cdot e^{-500 \cdot n \cdot 125 \cdot 10^{-6}} \cdot u(n) = 10e^{-0,0625n} u(n)$

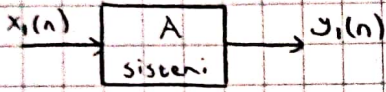
b. $x(n) = 10 \cdot \sin(200\pi n \cdot 125 \cdot 10^{-6}) u(n) = 10 \sin(0,025\pi n) u(n)$

Ayrık Zamanlı Sistemler

Linearity (Doğrusallık)

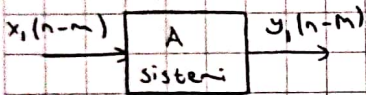


Zamanda Değişmezlik



Linearity + Time invariance = LTI system

↓
doğrusal zamanda değişmez



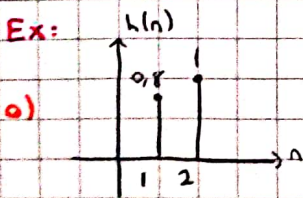
Nedensellik

$y(n)$ = çıkış (output) $x(n+1), x(n+2), \dots, y(n+1), y(n+2), \dots$ geleceğe ait çıkış ve girişlere bağlı ise

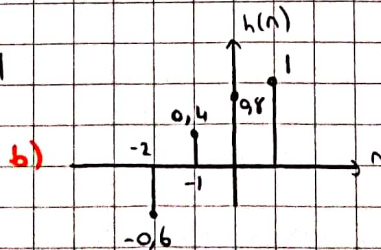
$y(n)$ = şimdiki çıkış, $x(n)$ = şimdiki giriş, $x(n+1)$ = Bir sonraki giriş (gelecek değer)

$h(n) = 0$ $n < 0$ için ise sistem nedenseldir

Ex:



nedensel



nedensel değil

c) $y(n) = 0,1 x(n) + 0,3 x(n-1) - y(n-2)$ (nedensel)

d) $y(n) = 0,3 x(n) + 0,6 x(n+1)$ nedensel değil

Ex. a. $y(n) = 3x(n-5)$

b. $y(n) = x(3n)$

a. Giris Çıkış
 $x(n)$ $3x(n-5)$

$x(n)$ $3x(n-5)$ lineer

$x(n-n_0)$ $3x(n-5-n_0)$ zamanda değişmez

b. Giris Çıkış
 $x(n)$ $x(3n)$

$x(n-n_0)$ $x(3n-n_0)$ zamanda değişmez değil

04.03.2019

Fark Denklemleri (Difference Equation)

$y(n)$: çıkış (output) $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_nx(n-n) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2) - \dots - a_ny(n-n)$

$x(n)$: giriş (input)

Eğer $a_1, a_2, \dots, a_n = 0$ ise sistem FIR (finite impulse response) sistemidir.

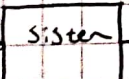
Eğer $a_1, a_2, \dots, a_n$ 'den herhangi biri $\neq 0$ ise sistem IIR (Infinite Impulse Response) sistemidir.

Ex: $y(n) = 0,3x(n) + 0,15x(n-1) + 1,2y(n-1) \Rightarrow$ sistemin katsayıları?

$b_0 = 0,3$ $a_1 = \underline{-1,2} \rightarrow$ ana denklemden - gelir

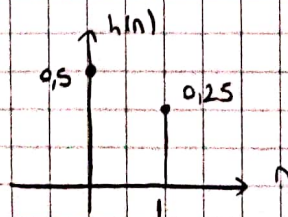
$b_1 = 0,15$

Birim Kuvvet Tepkisi (Impulse Response)

$x(n) = \delta(n)$  $y(n) = h(n)$ $h(n)$ = birim kuvvet tepkisi

Ex: $y(n) = 0,5x(n) + 0,25x(n-1)$ ise $h(n)$ 'nin grafiğini çiziniz

$h(n) = 0,5\delta(n) + 0,25\delta(n-1)$



FIR sistemin $h(n)$ 'nin sonlu sayıda değeri var.

Ex: $y(n) = 0,25y(n-1) + x(n)$, $y(-1) = 0 \Rightarrow h(n) = ?$
 $h(-1) = 0$

$h(n) = 0,25 h(n-1) + \delta(n) \Rightarrow h(n) = 0,25^n \cdot u(n)$ FIR sistemin $h(n)$ 'nin sonlu değeri var.

n	h(n)
0	1
1	0,25
2	0,25 ²
⋮	⋮
n	0,25 ⁿ

$h(0) = 0,25 h(-1) + \delta(0) \Rightarrow h(0) = 1$
 $h(1) = 0,25 h(0) + \delta(1) \Rightarrow h(1) = 0,25$
 $h(2) = 0,25 h(1) + \delta(2) \Rightarrow 0,25^2$

Bounded Input Bounded Output (Sınırlı giriş sınırlı çıkış koronliligi) (BIBO)

Bir sistemin sınırlı giriş (sonlu olmayan) değerlerine karşılık çıkışı her zaman sınırlı olursa sistemin BIBO koronliligine sahiptir.

Eğer BIBO koronliligi varsa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ olmalıdır.

Not: FIR sistemler BIBO koronlidir.

Ex: $y(n) = 1,2 y(n-1) + x(n)$, $h(-1) = 0$, $y(-1) = 0$ BIBO koronliligi yoktur.

$h(n) = 1,2 h(n-1) + \delta(n)$

n	h(n)
0	1
1	1,2
2	(1,2) ²
⋮	⋮
n	(1,2) ⁿ

$h(n) = 1,2^n \cdot u(n) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = 1 + 1,2 + 1,2^2 + 1,2^3 + \dots \Rightarrow \infty$ 'a yaklaşıyor.

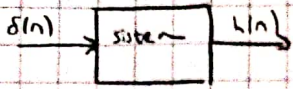
BIBO koronliligi yoktur.

Ex: $y(n) = 0,2 y(n-1) + x(n)$, $h(-1) = 0$, $h(n) = 0,2^n u(n)$

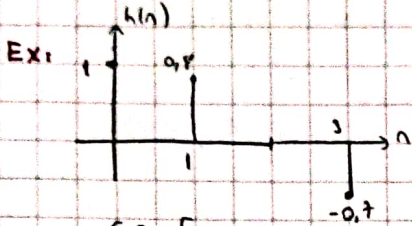
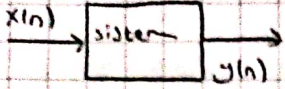
$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 0,2^n = \frac{1}{1-0,2} = \frac{1}{0,8} < \infty$ BIBO koronliligi var.

Ayrılc Zamanlı Kotaları

Ayrık Zamanlı Sistemler



$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$



$$h[n] = [1 \ 0.8 \ 0 \ -0.7]$$

$$h(n) = \delta(n) + 0.8\delta(n-1) - 0.7\delta(n-3)$$

$$y(n) = x(n) + 0.8x(n-1) - 0.7x(n-3)$$

$$x(n) = 0.3\delta(n) + 0.7\delta(n-2) - 1.3\delta(n-3)$$

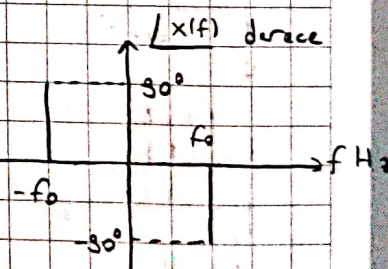
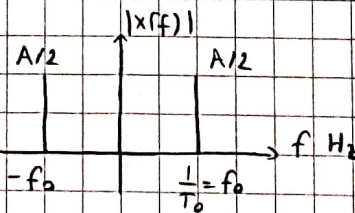
$$y(n) = ?$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x[n]	0.3	0	0.7	-1.3					
h[n]	1								
	0.8	1							
	0	0.8	1						
	-0.7	0	0.8	1					
	0	-0.7	0	0.8	1				
	0	0	-0.7	0	0.8	1			
	0	0	0	-0.7	0	0.8	1		
	0	0	0	0	-0.7	0	0.8	1	
	0.3	0.24	0.7	-0.95	-1.04	0.13	0.31		

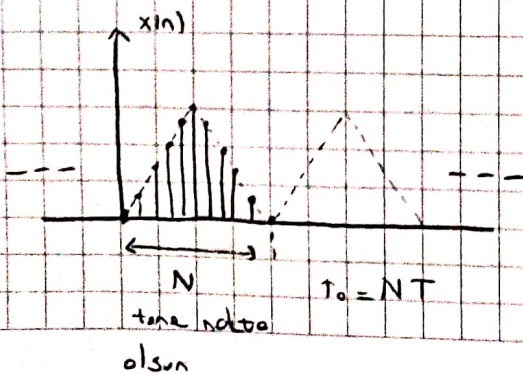
$$y(n) = 0.3\delta(n) + 0.24\delta(n-1) + 0.7\delta(n-2) - 0.95\delta(n-3) - 1.04\delta(n-4)$$

$$-0.48\delta(n-5) + 0.31\delta(n-6)$$

Ayrık Fourier Dönüşümü (Discrete Fourier Transform, DFT)



Periyodik Ayrık Zamanlı Sinyallerin Fourier Serisi Katsayıları



$x(n)$: periyodik ve periyodu

fourier serisi katsayıları

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad -\infty < k < \infty$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$T_0 = NT \Rightarrow$$

fourier serisi katsayıları (C_k)

denklerde $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ yerine

gözetilir, ve sinyalin ayrık zamanlı

olduğu göz önüne alınırsa C_k aşağıdaki

biçimde elde edilebilir.

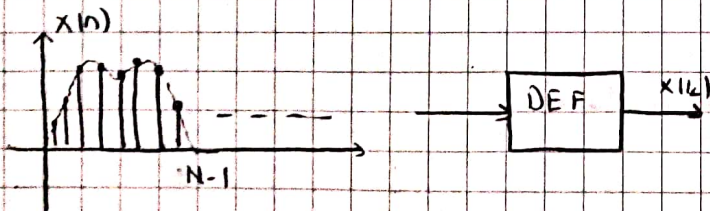
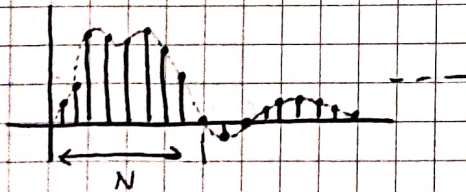
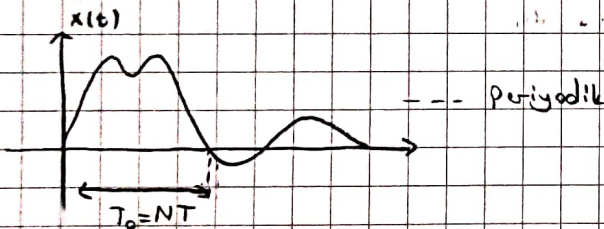
$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} nk}, \quad -\infty < k < \infty$$

C_k 'nin periyodik olduğu ve periyodunun N olduğu denklemden görülebilir.

$$e^{-j\frac{2\pi}{N} n(k+N)} = e^{-j\frac{2\pi}{N} nk} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} nN} = e^{-j\frac{2\pi}{N} nk}$$

$$C_k = C_{k+N}$$

⇒ Ayrık fourier dönüşümü



$$X(k) = N C_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} nk}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} x(n)$$

Ayrık fourier dönüşümü denklemleri

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = x(0) W_N^{0k} + x(1) W_N^{1k} + x(2) W_N^{2k} + \dots + x(N-1) W_N^{(N-1)k}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\downarrow$$

$$\frac{k \cdot f_s}{N}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$f = 0, \frac{f_s}{N}, \frac{2f_s}{N}, \dots, \frac{(N-1)f_s}{N}$$

$\frac{f_s}{N}$: frekans çözünürlüğü

05.03.2019

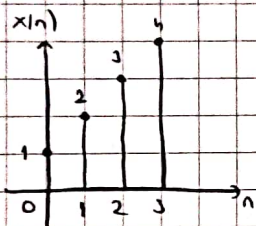
Ex: $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$ $X(k) = ?$ (Ayrık Fourier dönüşümü alalım)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

N : nokta sayısı = 4

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) (-j)^{nk} = x(0) + x(1) (-j)^k + x(2) (-j)^{2k} + x(3) (-j)^{3k}$$



$$X(k=0) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$X(k=1) = 1 + 2(-j)^1 + 3(-j)^2 + 4(-j)^3$$

$$= 1 - 2j - 3 + 4j = -2 + 2j$$

$$X(k=2) = -2$$

$$X(k=3) = -2 - 2j$$

$$\begin{aligned} (-j)^2 &= -1 \\ (-j)^3 &= j \end{aligned}$$

Ters Ayrık Fourier Dönüşümü (inverse discrete Fourier transform) (IDFT)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Yukarıdaki örneğin ters ayrık Fourier dönüşümü alalım

$$\left. \begin{aligned} \text{Ex: } X(k=0) &= 10 \\ X(k=1) &= -2 + 2j \\ X(k=2) &= -2 \\ X(k=3) &= -2 - 2j \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(n) = ?$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{-nk} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 x(k) (-j)^{nk} = \frac{1}{4} (x(0) + x(1)(-j)^{-n} + x(2)(-j)^{-2n} + x(3)(-j)^{-3n})$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \quad (=?)$$

$$x(n=0) = \frac{1}{4} (10 + (-2+2j) - 2 + (-2-2j)) = 1$$

$$x(n=1) = \frac{1}{4} (10 + (-2+2j)(-j) + (-2)(-1) + (-2-2j)(-j))$$

$$= \frac{1}{4} (10 - 2j - 2 + 2 + 2j - 2) = 2$$

$$x(n=2) = \frac{1}{4} ($$

$$x(n=3) =$$

Ex. $x(k=0) = 10$

$f_s = 10 \text{ Hz}$

frensta $x(k=1)$ ve $x(k=2)$ 'ye denk gelen frekanslar

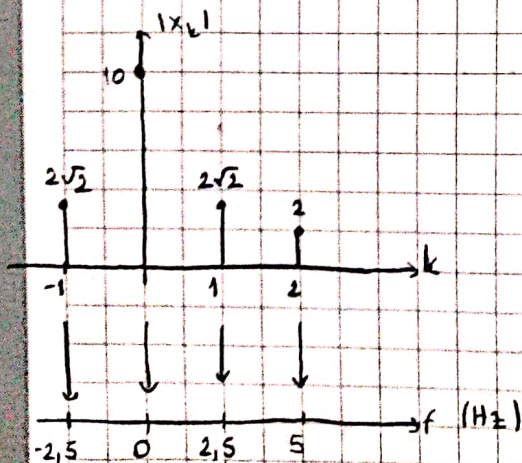
$x(k=1) = -2+2j$

nedir?

$x(k=2) = -2$

$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ Hz} : (\text{frenans çözünürlüğü})$

$x(k=3) = -2-2j$



? Genlik, Güç ve Faz Spektrumu (Amplitude, Power and Phase Spectrum)

A_k = çift yanlı genlik spektrumu (double sided amplitude spectrum)

$$A_k = \frac{1}{N} |x_k|$$

$\bar{A}_k$ = Tek yanlı genlik spektrumu

$$\bar{A}_k = \begin{cases} \frac{1}{N} |x(k=0)| \\ \frac{2}{N} |x(k)|, k=1, 2, \dots, N/2 \end{cases}$$

P_k = çift yanlı güç spektrumu

$\bar{P}_k$ = Tek yanlı güç spektrumu

$$P_k = \frac{1}{N^2} |x_k|^2$$

$$\bar{P}_k = \begin{cases} \frac{1}{N^2} |x(0)|^2, k=0 \\ \frac{2}{N^2} |x(k)|^2, k=1, 2, 3, \dots, N/2 \end{cases}$$

ψ_k = Faz spektrumu $\psi_k = \angle x(k)$

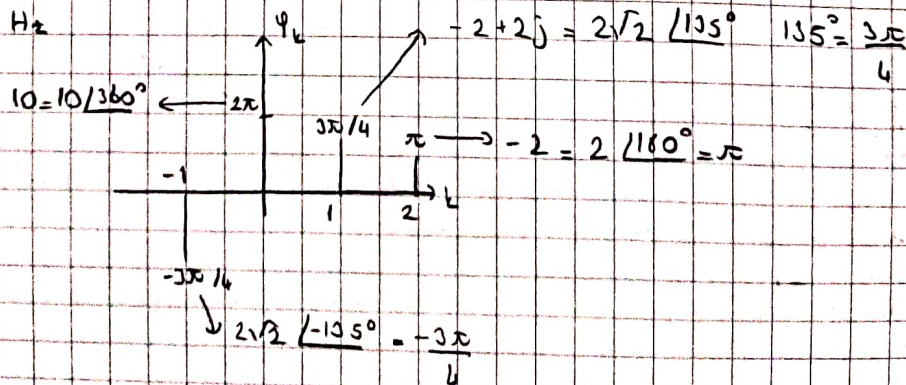
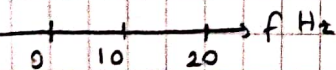
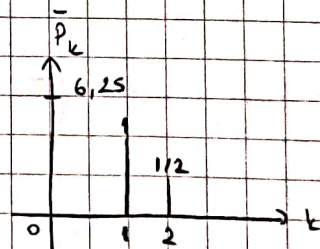
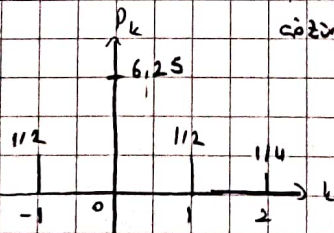
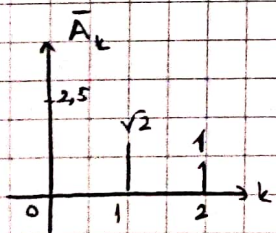
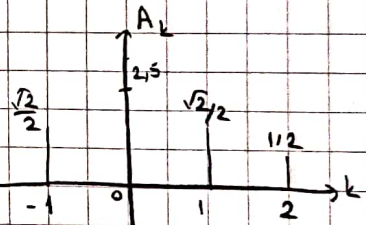
Ex: $x(k=0) = 10 = 10e^{j0} = 10e^{j2\pi}$ $A_k, \bar{A}_k, P_k, \bar{P}_k, \psi_k = ?$

$$x(k=1) = -2 + 2j$$

$$x(k=2) = -2 = 2e^{j\pi}$$

$$x(k=3) = -2 - 2j$$

$$f_s = 40 \text{ Hz}, N = 4, \Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{40}{4} = 10 \text{ Hz}$$



11.03.2018

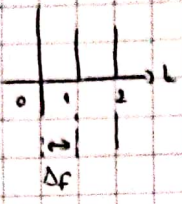
data points

Ex: 10 kHz'de örnekleme ($f_s = 10 \text{ kHz}$), $N = 1024$ nokta olan bir dizi'nin frekans çözünürlüğü $= \Delta f = ?$

En yüksek frekans değeri (highest frequency, $f_{\max}$) = ?

$$\Delta f = \frac{f_s}{N}$$

$$\Delta f = \frac{10 \cdot 10^3}{1024} = 9.77 \text{ kHz}$$



$$f_{\max} = \frac{N \cdot \Delta f}{2} = \frac{f_s}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ kHz}$$

→ (Discrete Fourier Transform)

Not: FFT (Fast Fourier Transform) algoritmaları DFT 'yi' daha az sayıda carpma ve toplama işlemleriyle gerçekleştirirler. FFT algoritmalarının çalışabilmesi için nokta sayısının 2'nin kuvveti olması gerekir. Eğer örnekleme sayısı 2'nin kuvveti değilse sonuna sıfırlar eklenerek örnekleme sayısı 2'nin kuvveti yapılır. 0 eklenince sadece çözünürlük artar, orijinal frekans spektrumuna bir etkisi yoktur.

Ex: $x(t) = 2 \sin(2000\pi t)$ $f_s = 8000 \text{ Hz}$

- Matlab ile genlik, güç, faz spektrumunu elde edip çizdiriniz. $\Delta f \leq 8 \text{ Hz}$ için
- Matlab ile örneklerin sonuna sıfır ekleyerek örnekleme sayısını 2'nin kuvveti yapip $A_k, \bar{A}_k, P_k, \bar{P}_k$ φ_k 'yi bulunuz.

a) $\Delta f \leq 8 \text{ Hz} \Rightarrow \Delta f = 8 = \frac{f_s}{N}$ $N = \frac{f_s}{8} = \frac{8000}{8} = 1000$

$$x(n) = 2 \sin\left(2000\pi n \cdot \frac{1}{8000}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$f_s = 8000$

$n = 0: 333;$

3. $x = 2 * \sin(\pi n / 4);$ $N = \text{length}(x);$
tic;

5. $X = \text{fft}(x);$ $\rightarrow$ orodaki islemin kac sn sürdüğünü gösterir
toc;

$A_k = \text{abs}(X) / N;$

$A_{k\text{tek}} = 2 * A_k(1:\text{round}(N/2));$

$A_{k\text{tek}}(1) = A_{k\text{tek}}(1) / 2;$ % tek yönlü genlik spektrumu

$P_{k\text{tek}} = (A_{k\text{tek}}.^2) / 2;$ % tek yönlü güç spektrumu

$P_{k\text{tek}}(1) = P_{k\text{tek}}(1) * 2;$

12. $f = (0:\text{round}(N/2)-1) * f_s / N;$

round tam değere yuvarlar

13. plot(f, A_ktek);

figure(2);

plot(f, P_ktek);

$\cdot 2$: dizi'nin her elemanının karesini almak


```

faz = angle(xf);
fazderece = 180 * faz / pi;
figure(13);
plot(f, fazderece(1:round(N/2)));

```

b) 3. satırın yerine aşağıdaki kod eklenir

```

x = 2 * sin(pi * n/4);
N = length(x);
forL = 1024 - N;
x = [x zeros(1, forL)];
N = length(x);

```

⇒ çift yönlü spektrum için 5. satırın yerine aşağıdaki kod eklenir

```

XF = fftshift(XF);

```

12. satırın yerinde aşağıdaki kod eklenir

```

f = ((-round(N/2)+1):(round(N/2)-1)) * fs / N;

```

13. satırın yerinde aşağıdaki kod eklenir

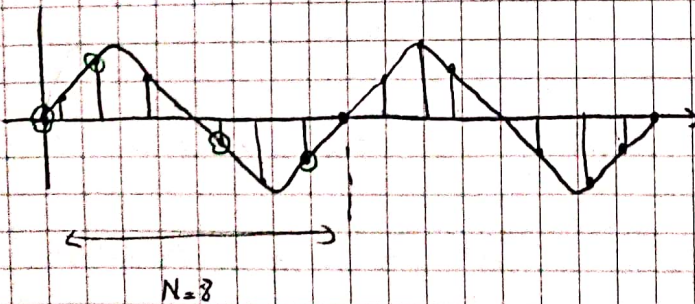
```

plot(f, Ak); % çift yönlü genlik spektrumu

```

Pencere Fonksiyonları (Window Functions)

Ayrık Fourier dönüşümünde (DFT) örneklenen verinin kendini tekrar ettiği yada periyodik olduğu varsayılabilir. İkinci bir lobun da örneklenen işaretin içinde bulunması en yüksek frekansın $f_s/2$ (folding frequency) (Nyquist frequency). Bu ikinci lob genelde gerçekleşmez. Örneğin 1 Hz'lik bir sinüs işaretinin 32 örneği ($N=32$) alındığını varsayalım. Eğer pencere boyu olarak 16 kullanırsak 32, 16'nın tam katı olduğundan süreklilik sağlanır. Ancak pencere boyu 18 olsa süreklilik sağlanamaz.



Bu durum istenilen gelismeler için pencere fonksiyonu adı verilen bir fonksiyonla örnek değerleri carpılır. Duradıkları anlar ota orkestra alındığında sürekliliğe yol açan noktaların etkisi azaltılır. Sürekliliğe sebep olan noktalar eşit Fourier dönüşümünde (DFT) olanları gereken değerler alınmasına neden olur. Buna spektral kaza (spectral leakage) denir.

$X_w(n) = W(n) \cdot x(n)$ → Pencerelemiş ve spektral kazağı azaltılmış fonksiyon, DFT bunun üzerinden hesaplanabilir.

Rectangular (dikdörtgen) window: $W_R(n) = 1$

Triangular (üçgen) window: $W_{tri}(n) = 1 - \frac{|2n - N + 1|}{N - 1}$ $0 \leq n \leq N - 1$

Hanning window: $W_{Hn}(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N - 1}\right)$; $0 \leq n \leq N - 1$

Hanning window: $W_{Hn}(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N - 1}\right)$; $0 \leq n \leq N - 1$

Ex: $x(0) = 1$
 $x(1) = 2$
 $x(2) = 3$
 $x(3) = 4$

$f_s = 100 \text{ Hz}$
 $T = 0.01 \text{ s}$

a. Triangular window ile DFT'sini hesaplayın

b. Hanning window ile DFT'sini hesaplayın.

Gerekli spektrumlarını çiziniz.

o. $N = 4$

$$W_{tri}(0) = 1 - \frac{|0 - 4 + 1|}{3} = 0$$

$$W_{tri}(1) = 1 - \frac{|2 - 4 + 1|}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$W_{tri}(2) = 1 - \frac{|4 - 4 + 1|}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$W_{tri}(3) = 1 - \frac{|6 - 4 + 1|}{3} = 0$$

$$x_w(0) = 0 \times 1 = 0$$

$$x_w(1) = \frac{2}{j} \times 2 = \frac{4}{j}$$

$$x_w(2) = \frac{j}{j} \times 3 = 2$$

$$x_w(3) = 0 \times 4 = 0$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_w(n) W_N^{nk} = x_w(0) + x_w(1) (-j)^k + x_w(2) (-j)^{2k} + x_w(3) (-j)^{3k}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

$$x(k=0) = 3, j, j, 4 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{4}$$

Fast Fourier Transform (FFT)

DFT'yi daha az işlemle gerçekleştiren yöntemdir. Fourier dönüşü alınacak $x(n)$ 'nin 2^m (m pozitif tam sayı) noktası olduğu varsayılır.

⇒ Frekansa Desiasyon Yöntemi (Decimation frequency method)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$X(k) = x(0) + x(1) W_N^k + x(2) W_N^{2k} + \dots + x(N-1) W_N^{k(N-1)}$$

$$X(k) = x(0) + x(1) W_N^k + \dots + x\left(\frac{N}{2}-1\right) W_N^{k\left(\frac{N}{2}-1\right)} + x\left(\frac{N}{2}\right) W_N^{\frac{kN}{2}} + \dots + x(N-1) W_N^{k(N-1)}$$

$X(k)$ ifadesini iki ayrı toplam sembolüyle aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{nk} + W_N^{(\frac{N}{2})k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{nk}$$

$$W_N^{\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^{nk} \quad ; \text{ nokta sayısı çift olduğu için } (-1)^k \text{ ile } (-1)^{2m} \text{ olur.}$$

$$k=2m \text{ olan çift sayılarda } X(2m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^{2mn}$$

$k=2m+1$ olan tek sayı değerlerinde

$$k=2m+1 \text{ (tek)} \quad X(2m+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^n W_N^{2mn}$$

$$W_N^2 = e^{\frac{j2\pi 2}{N}} = e^{\frac{j2\pi}{N/2}} = W_{N/2} \text{ olduğundan}$$

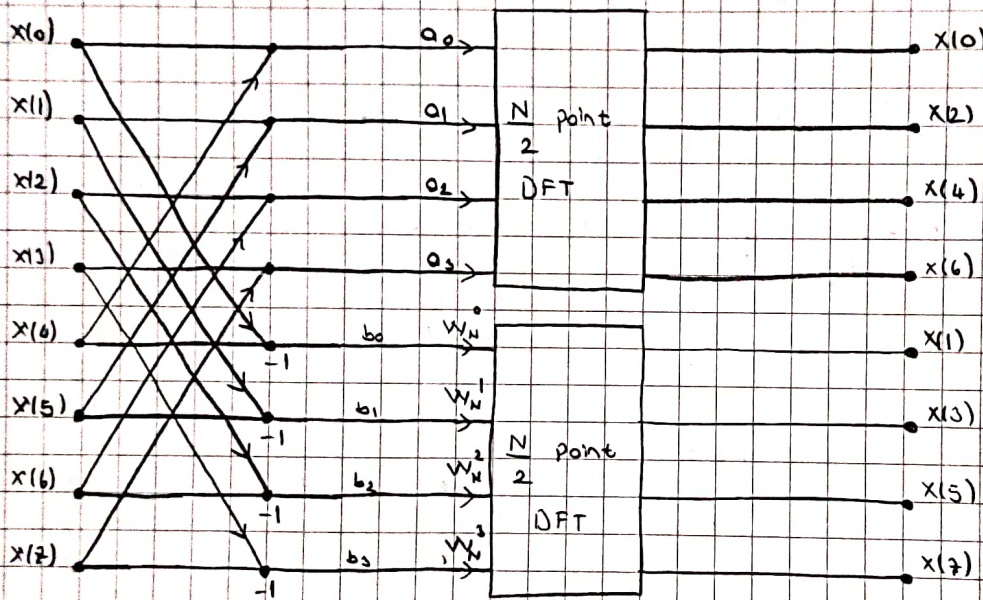
$$x(2n) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} a(m) W_{N/2}^{mn} \quad , \quad x(2n+1) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} b(m) W_{N/2}^{m(n+\frac{1}{2})}$$

$x(n)$ için N noktalı DFT'si
 $a(n)$ için $\frac{N}{2}$ noktalı DFT'si
 $b(n)$ için $\frac{N}{2}$ noktalı DFT'si.

$$a(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) ; n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

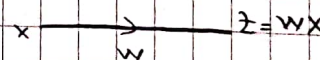
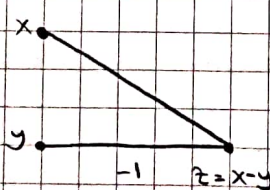
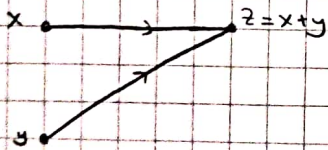
$$b(n) = x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) ; n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

şimdiye kadar yapılan işlemler aşağıdaki grafikte gösterilmektedir.



Şekil 4.24

Sevize noktalı FFT'nin ilk yinelenmesi.



Grafiksel işlemlerin tanımları

DFT için kompleks sayım $DFT = N^2$ ve FFT için kompleks sayım $FFT = \frac{N}{2} \log_2(N)$

18.03.2019

DFT isleminde N^2 adet (noktasayısı) karmaşık çarpma işlemi vardır.

FFT isleminde ise $\frac{N}{2} \log_2(N)$ kadar karmaşık çarpma işlemi vardır.

Ex: $N = 1024$ ise DFT'de $N^2 = 2^{10}$ adet karmaşık çarpma vardır.

FFT'de $\frac{N}{2} \log_2(N) = \frac{1024}{2} \log_2(1024) = 5120$ adet karmaşık çarpma vardır.

IFFT (Inverse fast fourier transform) isleminde FFT ile aynı algoritma kullanılabilir.

Sadece

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{W}_N^{nk} x(k) \quad \text{sadece } W_N \text{ yerine } \tilde{W}_N \text{ kullanılır}$$

$\tilde{W}_N = W_N^{-1}$

birden son bulunan noktalar $1/N$ ile çarpılmaktadır.

Ex: $x(0) = 1$ Decimation in Frequency yöntemiyle fourier dönüşümü hesaplayınız.

$$x(1) = 2$$

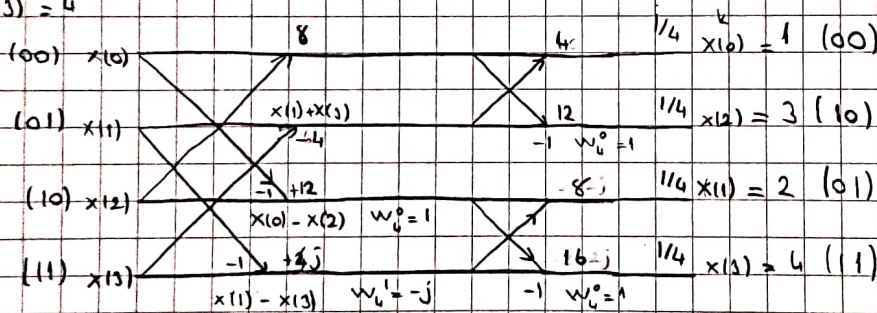
$$x(2) = 3$$

$$x(3) = 4$$

$$W_4 = e^{-j \frac{2\pi}{4}} = -j$$

$$(-j)^2 = -1$$

$$(-j)^3 = j$$



$$X(n) = \sum_{k=0}^3 x(k) (-j)^{nk} = \left[x(0) + x(1) (-j)^1 + x(2) (-j)^2 + x(3) (-j)^3 \right]$$

$$x(0) = [1 + 2 + 3 + 4] = 10 \quad 0 \ 0$$

$$x(1) = 1 - 2j - 3 + 4j = -2 + 2j \quad 0 \ 1$$

$$x(2) = 1 - 2 + 3 - 4 = -2 \quad 1 \ 0$$

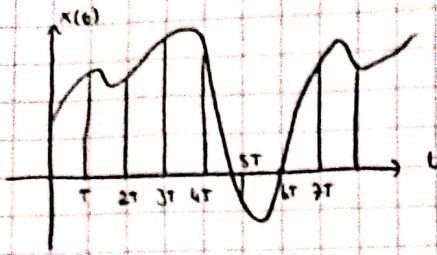
$$x(3) = 1 + 2j - 3 - 4j = -2 - 2j \quad 1 \ 1$$

Sistemin frekans tepkisi bulunak

↑

z-Transform (Dönüşüm)

Tez. yarı. z dönüşümü $x(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$



$$x(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t) \delta(t - nT) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + \dots$$

$$\sum \{x(nT)\} = x(0) + x(T)e^{-j\omega T} + x(2T)e^{-j2\omega T} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \Rightarrow z = e^{j\omega T}$$

Ex: $Z\{u(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

$|z^{-1}| < 1$ almalı. Yoklarsa bölge:

$$\frac{1}{|z|} < 1 \Rightarrow 1 < |z| \quad |z| > 1$$

Ex: $x(n) = a^n \cdot u(n) \Rightarrow x(z) = ?$

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot z^{-1})^n = \frac{1}{1-a z^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad |a z^{-1}| < 1 \quad \frac{|a|}{|z|} < 1 \quad |a| < |z| \quad \text{ROC}$$

Ex: a. $x(n) = 10 \cdot u(n)$

b. $x(n) = 10 \sin(0,25\pi n) \cdot u(n)$

c. $x(n) = (0,5)^n \cdot u(n) \Rightarrow x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (0,5 z^{-1})^n = \frac{1}{1-0,5 z^{-1}}$

d. $x(n) = (0,5)^n \sin(0,25\pi n) u(n)$

e. $x(n) = e^{-0,1n} \cos(0,25\pi n) u(n)$

a) $x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 10(z^{-1})^n = 10 \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{ROC } |z^{-1}| < 1 \quad |z| > 1$

$$= \frac{10z}{z-1}$$

b) $x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 10 \sin(0,25\pi n) z^{-n} = 10 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{j0,25\pi n} - e^{-j0,25\pi n}}{2j} z^{-n} = \frac{10}{2j} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (e^{j0,25\pi} z^{-1})^n - \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-j0,25\pi} z^{-1})^n \right]$

$$= \frac{10}{2j} \left[\frac{1}{1 - e^{j0,25\pi} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j0,25\pi} z^{-1}} \right] = \frac{7,07z}{z^2 - 1,414z + 1}$$

b. iki ifadenin < 1 olduğu gere. sağlanıyor

ROC $|e^{j0,25\pi} z^{-1}| < 1 \cap |e^{-j0,25\pi} z^{-1}| < 1 \quad |z^{-1}| < 1 \cap |z^{-1}| < 1 \quad |z| > 1$

$$d) x(n) = (0,5)^n \cdot \sin(0,25\pi n) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (0,5)^n \cdot \sin(0,25\pi n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0,5)^n \cdot z^{-n} \cdot \frac{e^{j0,25\pi n} - e^{-j0,25\pi n}}{2j}$$

$$\frac{1}{2j} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{0,5 \cdot z^{-1} e^{j0,25\pi}}{1} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{0,5 \cdot z^{-1} e^{-j0,25\pi}}{1} \right)^n \right]$$

$$\frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - 0,5 z^{-1} e^{j0,25\pi}} - \frac{1}{1 - 0,5 z^{-1} e^{-j0,25\pi}} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - \frac{0,5 \cdot e^{j0,25\pi}}{z}} - \frac{1}{1 - \frac{0,5 \cdot e^{-j0,25\pi}}{z}} \right]$$

$$\frac{1}{2j} \left[\frac{1}{\frac{z - 0,5 e^{j0,25\pi}}{z}} - \frac{1}{\frac{z - 0,5 e^{-j0,25\pi}}{z}} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z - 0,5 e^{j0,25\pi}} - \frac{z}{z - 0,5 e^{-j0,25\pi}} \right]$$

19.03.2013

z-Dönüşümün Özellikleri:

$$1. z(ax_1(n) + bx_2(n)) = ax_1(z) + bx_2(z)$$

$$2. z(x(n-m)) = z^{-m} x(z)$$

$$3. z(x(n-m)) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m) z^{-n} = x(-m) + x(1-m) z^{-1} + x(2-m) z^{-2} + \dots + x(-1) z^{-m+1} +$$

$$\underbrace{x(0) z^{-m} + x(1) z^{-m+1} + x(2) z^{-m+2} + \dots}_{z^{-m} (x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \dots)} = z^{-m} x(z)$$

Katılların geçerli olabilmesi için başlangıç değerleri sıfır olmalı.

$$\text{Ex: } y(n) = (0,5)^{n-5} u(n-5) \Rightarrow z^{-5} \frac{1}{1 - 0,5 z^{-1}} = Y(z) \quad \vee \quad Y(z) = z^{-5} \frac{z}{z - 0,5}$$

$$3. x(n) = x_1(n) * x_2(n) \Rightarrow X(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

ispatı

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_2(k) x_1(n-k) \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_2(k) x_1(n-k) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x_2(k) z^{-k} x_1(n-k) z^{-(n-k)} = \sum_{k=0}^{\infty} x_2(k) z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n-k) z^{-(n-k)} = \sum_{k=0}^{\infty} x_2(k) z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} x_1(m) z^{-m} = X_2(z) X_1(z)$$

z dönüşüne ile köklendirme yapılır.

$$\text{Ex: } x_1(n) = 3\delta(n) + 2\delta(n-1)$$

$$x_2(n) = 2\delta(n) - \delta(n-1)$$

$$z(x_1(n) * x_2(n)) = ?$$

$$x_1(z) = 3 + 2z^{-1}$$

$$x_2(z) = 2 - z^{-1}$$

$$x_1(z) \cdot x_2(z) = 6 - 3z^{-1} + 4z^{-1} - 2z^{-2}$$

$$z^{-1}(x_1(z) \cdot x_2(z)) = 6\delta(n) - 3\delta(n-1) + 4\delta(n-1) - 2\delta(n-2)$$

$\delta(n-1)$

Alınan ters dönüşün
kuvveti doğru
olacağına dikkat

n	0	1	2	3	4
	6	4			
		-3	-2		
	6	1	-2		

$$x_1(n) * x_2(n) = 6\delta(n) + \delta(n-1) - 2\delta(n-2)$$

25.03.2019

Ters z dönüşümü

Kısmi kesirlere ayırma ile ters z dönüşümü aşağıdaki adımları takip ederek yapılır.

1. $x(z)$ 'nin negatif kuvvetleri pozitif yapılır.

2. $x(z)/z$ kısmi kesirlere ayrılır.

3. Ters z dönüşümü alınır.

* Kısmi kesirlere ayırma

1. Birinci mertebe gerçel köklerin olması.

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{2}{z-p} \Rightarrow k = \frac{x(z)}{z} \bigg|_{z=p} \quad p: \text{kutup}$$

2. Birinci mertebe karmaşık köklerin olması.

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{A}{z-p} + \frac{A^*}{z-p^*} \Rightarrow A = \frac{x(z)}{z} \cdot (z-p) \bigg|_{z=p}$$

3. m'inci derece gen'el k'oklerin ol'ası

$$\frac{R_m}{z-p} + \frac{R_{m-1}}{(z-p)^2} + \dots + \frac{R_1}{(z-p)^m} = \frac{x(z)}{z}$$

$$R_k = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-p)^m \frac{x(z)}{z} \right) \Big|_{z=p}$$

Örnek: $x(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-0,5z^{-1})} \Rightarrow x(n) = ?$ il'ince z^{-1} 'i terimler v'ok ed'ilir.

$$x(z) = \frac{z^2}{z^2(1-z^{-1})(1-0,5z^{-1})} = \frac{z^2}{z^2-1,5z+0,5}$$

$$1-0,5z^{-1}-z^{-1}+0,5z^{-2}$$

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0,5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5} \Rightarrow A = \frac{x(z)}{z} \Big|_{z=1} = 2$$

$$B = \frac{x(z)}{z} \Big|_{z=0,5} = -1$$

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} \Rightarrow x(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0,5}$$

$$x(n) = 2 \cdot u(n) - (0,5)^n \cdot u(n)$$

Örnek: $y(z) = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)(z^2-z+0,5)} \Rightarrow y(n) = ?$

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{z(z+1)}{(z-1)(z^2-z+0,5)}$$

$$(z-(0,5+j0,5j))(z-(0,5-j0,5j))$$

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5-j0,5j} + \frac{B^*}{z-0,5+j0,5j} \Rightarrow$$

$$A = 4$$

$$B = \frac{y(z)}{z} \Big|_{z=0,5-j0,5j}$$

$$-j161,57^\circ$$

$$B = 1,58114e$$

$$y(z) = \frac{4z}{z-1} + \frac{1,58114e^{j(161,57)^\circ}}{(z-0,5-j0,5j)} + \frac{1,58114e^{-j(161,57)^\circ}}{(z-0,5+j0,5j)}$$

$$y(n) = 4u(n) + 2|B|(1|P|)^n \cdot \cos(n\theta + \phi) \cdot u(n)$$

f(k)	F(z)
$\delta(k)$	1
$1(k)$	$\frac{z}{z-1}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$

$$y(n) = 6 u(n) + 3,1625 \cdot (0,7071)^n \cdot \cos(45^\circ n - 161,5^\circ)$$

Örnek: $x(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-0,5)^2} \Rightarrow x(n) = ?$

$$z(n \cdot 0^n u(n)) = \frac{0z}{(z-0)^2}$$

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0,5)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,5} + \frac{C}{(z-0,5)^2} \Rightarrow A=4$$

$$C=-1$$

$$B=$$

$$x(z) = \frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z-0,5} + \frac{Cz}{(z-0,5)^2}$$

$$x(n) = A \cdot u(n) + B \cdot (0,5)^n u(n) + C(0,5)^n \cdot n \cdot u(n)$$

$$\left. \frac{d}{dz} \left(\frac{x(z)}{z} (z-0,5)^2 \right) \right|_{z=0,5} = \left. \frac{d}{dz} \left((z-0,5)^2 \frac{A}{z-1} \right) \right|_{z=0,5} + \left. \frac{d}{dz} \left(B(z-0,5) \right) \right|_{z=0,5} + \left. \frac{d}{dz} (C) \right|_{z=0,5} \Leftrightarrow \left(\frac{C}{(z-0,5)^2} \right)_{z=0,5} \text{ bu terim } (z-0,5)^2 \text{ ile çarpınca 0}$$

$$\left. \frac{d}{dz} \left(\frac{x(z)}{z} (z-0,5)^2 \right) \right|_{z=0,5} = B \quad \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) \right|_{z=0,5} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \Big|_{z=0,5} = \frac{1}{-0,5} \cdot 2 = -4$$

$$x(n) = 4 u(n) - 4 (0,5)^n u(n) - (0,5)^n \cdot n \cdot u(n)$$

Matlab ile kısmi kesirlere ayırma

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M}{z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N}$$

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{r_1}{z-p_1} + \frac{r_2}{z-p_2} + \dots + k_0 + k_1 z^{-1}$$

$$[r, p, k] = \text{residue}(B, A);$$

$$B = [b_0 \ b_1 \ \dots];$$

$$A = [1 \ a_1 \ \dots];$$

Örnek: $x(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})(1-0,5z^{-1})}$ matlab ile kısmi kesirlere ayırınız

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 1,5z + 0,5}$$

$$A = [1 \ -1,5 \ 0,5];$$

$$B = [1 \ 0];$$

$$[Q, P, K] = \text{residue}(B, A) \Rightarrow$$

$$R = [r_1, \dots, r_N]$$

$$P = [p_1, \dots, p_M]$$

$$K = [k_1, \dots, k_L]$$

$$R = [r_1, r_2, \dots]$$

$$P = [p_1, p_2, \dots]$$

$$K = [k_1, k_2, \dots]$$

Fark Denkleminin Z dönüşümüyle Çözülmesi:

Başlangıç koşulları varsa Z dönüşümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Z(y(n-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1) z^{-n} = y(-1) + y(0) z^{-1} + y(1) z^{-2} + \dots$$

$$= y(-1) + z^{-1} (y(0) + y(1) z^{-1} + \dots)$$

$$= y(-1) + z^{-1} Y(z) \quad z^{-3} (y(0) + y(1) z^{-1} + y(2) z^{-2} + \dots)$$

$$Z(y(n-2)) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n-2) z^{-n} = y(-2) + y(-1) z^{-1} + y(0) z^{-2} + y(1) z^{-3} + \dots$$

$$= y(-2) + y(-1) z^{-1} + z^{-2} Y(z)$$

Not: Fark denklemini Z dönüşümü ile çözümlerken aşağıdaki adımlar takip edilmelidir.

1. Fark denkleminin Z dönüşümü alınır
2. Başlangıç koşulları yerine yazılır
3. Ters Z dönüşümü alınarak fark denklemini çözülür.

Ex. $y(n) - y(n-1) = 5 \cdot (0,2)^n u(n)$

$y(-1) = +1$ başlangıç koşulu

1) $Y(z) - y(-1) - z^{-1} Y(z) = \frac{5z}{z-0,2}$

3) $Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{5z}{z-0,2} + 1$

2) $Y(z) - 1 - z^{-1} Y(z) = \frac{5z}{z-0,2}$

$Y(z) = \frac{5z}{(z-0,2)(1-z^{-1})} + \frac{1}{1-z^{-1}}$

$Y(z) = \frac{5z + z - 0,2}{(z-0,2)(1-z^{-1})} = \frac{6z - 0,2z}{(z-0,2)(z-1)}$

$\frac{Y(z)}{z} = \frac{6z - 0,2}{(z-0,2)(z-1)} = \frac{A}{z-0,2} + \frac{B}{z-1}$

$A = \frac{1}{-0,8} = -1,25 \quad B = \frac{6-0,2}{1-0,2} = \frac{5,8}{0,8} = 7,25$

$Y(z) = \frac{A z}{z-0,2} + \frac{B z}{z-1} \Rightarrow y(n) = A(0,2)^n u(n) + B u(n)$

Ex: $y(n) + 0,1y(n-1) - 0,2y(n-2) = x(n) + x(n-1)$

a. $h(n) = ?$ $x(n) = \delta(n)$

b. Birim basamak tepkisi = ?

a. $Y(z) + 0,1z^{-1}Y(z) - 0,2z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+1}{z^2+0,1z-0,2}$$

$$Y(z)(1+0,1z^{-1}-0,2z^{-2}) = X(z)(1+z^{-1})$$

$$Y(z)(1+0,1z^{-1}-0,2z^{-2}) = (1+z^{-1})$$

$$Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0,1z^{-1}-0,2z^{-2}} = \frac{z^2+z}{z^2+0,1z-0,2}$$

$$= \frac{z+1}{(z-0,4)(z+0,5)} = \frac{A}{z-0,4} + \frac{B}{z+0,5}$$

$$A = \frac{1,4}{0,9} = \frac{14}{9} = 1,55$$

$$B = \frac{0,5}{-0,9} = -\frac{5}{9} = -0,55$$

$$Y(z) = \frac{A}{z-0,4} + \frac{B}{z+0,5} = A(0,4)^n u(n) + B(-0,5)^n u(n)$$

b. $Y(z) + 0,1z^{-1}Y(z) - 0,2z^{-2}Y(z) = X(z) + z^{-1}X(z)$

$$Y(z)(1+0,1z^{-1}-0,2z^{-2}) = X(z)(1+z^{-1})$$

$$Y(z)(1+0,1z^{-1}-0,2z^{-2}) = (1+z^{-1})$$

$$Y(z)(1+0,1z^{-1}-0,2z^{-2}) = \left(\frac{z}{z-1}\right)(1+z^{-1})$$

$$Y(z) = \frac{z(1+z^{-1})}{(z-1)(1+0,1z^{-1}-0,2z^{-2})} \quad Y(z) = \frac{z(z^2+z)}{(z-1)(z^2+0,1z-0,2)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2+z}{(z-1)(z-0,4)(z+0,5)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-0,4} + \frac{C}{z+0,5}$$

$$A = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9} = 1,11$$

$$B = \frac{0,56}{(-0,6)(0,9)} = \frac{0,56}{-0,54} = -\frac{56}{54} = -1,04$$

$$C = \frac{-0,25}{(-1,5)(-0,9)} = \frac{-0,25}{1,35} = -0,185$$

$$Y(n) = A u(n) + B(0,4)^n u(n) + C(-0,5)^n u(n)$$

Örnek: $x(t) = 10 \cos(2\pi 5500t) + 5 \sin(2\pi 7500t)$;

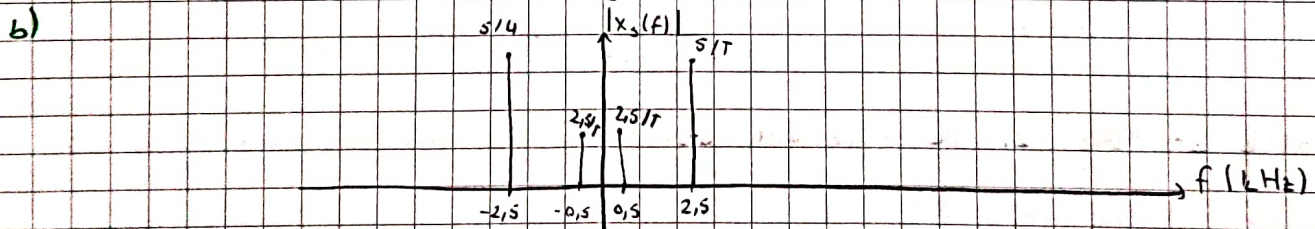
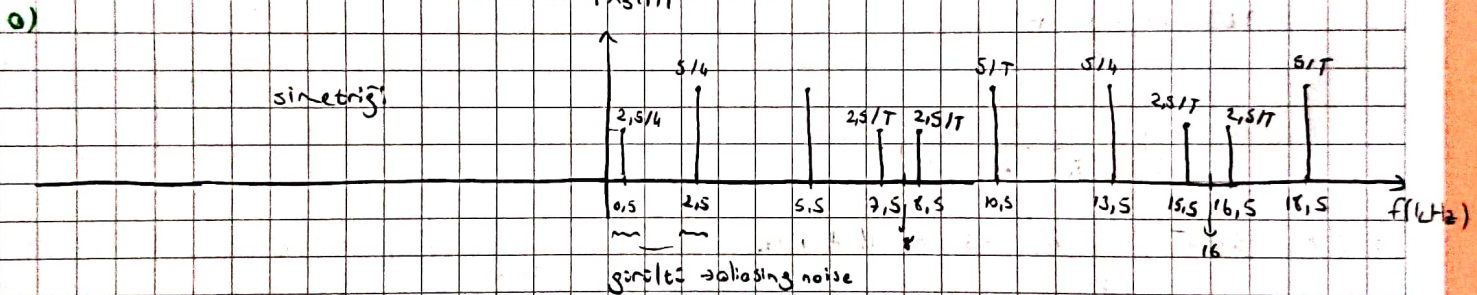
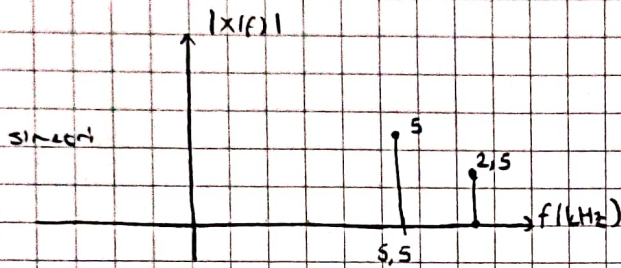
$f_s = 8000 \text{ Hz}$

a. 20 kHz'e kadar olan örnekleme sinyal spektrumunu çizin

b. ideal alçak geçiren süzgeç (kesim frekansı = 4 kHz) kullanılırsa elde edilen analog sinyali çizin.

c. Aliasing noise (örtüşme gürültüsü) olan frekansları belirleyiniz.

$$x(t) = 10 \cdot \frac{e^{j2\pi 5500t} + e^{-j2\pi 5500t}}{2} + 5 \cdot \frac{e^{j2\pi 7500t} - e^{-j2\pi 7500t}}{2j}$$



c) 0,5 ve 2,5 kHz

Ex: ikinci mertebe (second order), antialiasing > alçak geçiren filtre kullanılmaktadır. Filtre butter-worth filteri olup, kesim frekansı 1000Hz dir. Buna göre örneklene frekansı 4000Hz iken, 500Hz 'deki girişin seviyesini hesaplayınız.

$$\% \text{ Attenuation} = \frac{\sqrt{1 + (f_o/f_c)^{2n}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_s - f_o}{f_c}\right)^2}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{500}{1000}\right)^4}}{\sqrt{1 + \left(\frac{4000 - 500}{1000}\right)^2}} = \% 5,33$$

Ex örneklene frekansı 8000Hz olan bir DAC 'da, tutma (hold) devresi kullanılmaktadır.

a) 3200 Hz 'deki bozulma oranı

b) 1500 Hz 'deki bozulma oranı

$$\% \text{ Bozulma} = \left(1 - \left| \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right| \right) \times 100$$

a) $f T = 3200 \cdot \frac{1}{8000} = 0,4$

$$\% \text{ Bozulma} = \left(1 - \frac{\sin(\pi \cdot 0,4)}{\pi \cdot 0,4} \right) \times \% 100$$

b) $f T = 1500 \cdot \frac{1}{8000} = 0,1875$ $\% \text{ Bozulma} = \left(\frac{1 - \sin(\pi \cdot 0,1875)}{\pi \cdot 0,1875} \right) \times \% 100$

Ex: 3 bitlik bir ADC -2,5 ile +2,5 Volt arasındaki gerilim değerlerini kabul etmektedir.

a) quantalama seviye sayısı = ?

b) adım büyüklüğü = ?

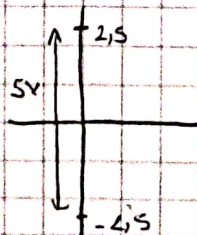
c) analog giriş gerilimi -1,2V iken quantalanmış değer?

d) ADC ile oluşturulan ikili (binary) kod

e) quantalama hatası

a) $2^3 = 8$

b) $\Delta = \frac{X_{max} - X_{min}}{L} = \frac{5}{8} = 0,625$



$n+1$ 'li bir terim yok

Ex: a) $y(n) = 0,5 x(n) + 100 x(n-2) - 20 x(n+10)$ (Doğrusal, zamanda değişmez, ⁿnedensel)

b) $y(n) = x(n+4) + 0,5 x(n) - 2 x(n-2)$ Doğrusal, zamanda değişmez, nedensel değil

c) $y(n) = -5 x(n-10)$ Doğrusal, zamanda değişmez, nedensel

d) $y(n) = 4 x(n^2)$ Doğrusal, zamanda değişmezliği yok, nedensel

e) $y(n) = 5 x(n) + 2 x^2(n)$ Doğrusal değil, zamanda değişmez, nedensel

Yukarıdaki sistemlerin doğrusallık, zamanda değişmezlik ve nedensellik özelliklerini inceleyin.

Ex: a) $y(n) = 0,5 x(n) - 0,5 x(n-2)$; $x(-2) = 0$
 $x(-1) = 0$ } $h(n) = ?$

b) $y(n) = 0,75 y(n-1) + x(n)$; $y(-1) = 0$

a) $h(n) = 0,5 \delta(n) - 0,5 \delta(n-2)$

b) $h(n) = 0,75 h(n-1) + \delta(n)$

iteratif yöntem

n	h(n)
0	1
1	0,75
2	0,75 ²
3	0,75 ³

$$\Rightarrow h(n) = 0,75^n u(n)$$

z dönüşümü:

b) 2. yol $Y(z) = 0,75 z^{-1} Y(z) + X(z) \Rightarrow Y(z) (1 - 0,75 z^{-1}) = X(z)$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,75 z^{-1}} \Rightarrow h(n) = 0,75^n u(n)$$

Ex: Aşağıdaki sistemlerin kararlılıklarını inceleyiniz.

a) $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 0,75^k x(n-k)$

b) $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x(n-k)$

a) $h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 0,75^k \delta(n-k)$

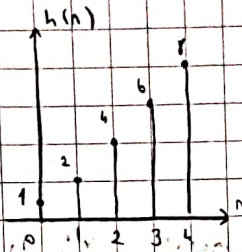
n	h(n)
0	1
1	0,75
2	(0,75) ²

kararlılık (BIBO stability) için

$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$ olmalı.

$\sum_{n=0}^{\infty} 0,75^n = \frac{1}{1-0,75} < \infty$ kararlıdır.

b) $h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \delta(n-k)$



$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \rightarrow \infty$ kararlı değil.

Ex:

$h(k) = \begin{cases} 2; & k=0,1,2 \\ 1; & k=3,4 \\ 0; & \text{diğer} \end{cases}$

$x(k) = \begin{cases} 2; & k=0 \\ 1; & k=1,2 \\ 0; & \text{diğer} \end{cases}$

kolona işleri

$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k) = ?$

birim vektör
↓
tekrarlı olarak

k	h(k)
0	2
1	2
2	2
3	1
4	1

k	x(k)
0	2
1	1
2	1
3	0
4	0

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x(k)
	4	4	4	2	2					→ h(k) x 2
		2	2	2	1	1				→ h(k) x 1
+			2	2	2	1	1			→ h(k) x 1
	4	6	8	6	5	2	1			
⇒										

$\Rightarrow y(n) = 4\delta(n) + 6\delta(n-1) + 8\delta(n-2) + 6\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + 2\delta(n-5) + \delta(n-6)$

2. Yol: Z dönüşümü ile çözüm $2\delta(n) \rightarrow 2\delta(n-1) \rightarrow 2\delta(n-2) \rightarrow \delta(n-3) \rightarrow \delta(n-4)$

$Y(z) = H(z) X(z)$ $H(z) = 2 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}$

$X(z) = 2 + z^{-1} + z^{-2}$

$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = 4 + 4z^{-1} + 4z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4} + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5} + z^{-6}$
 $= 4 + 6z^{-1} + 8z^{-2} + 6z^{-3} + 5z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6}$

$y(n) = 4\delta(n) + 6\delta(n-1) + 8\delta(n-2) + 6\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + 2\delta(n-5) + \delta(n-6)$

fourier dönüşümü

Ex: $x(0)=1$, $x(1)=1$, $x(2)=-1$, $x(3)=0$ $x(n)$ 'nin DFT'si $x(k)=?$

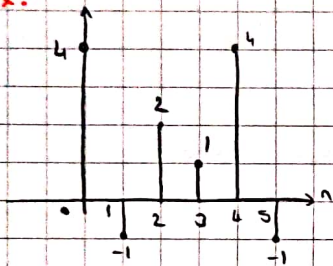
$N=3$ ($x(3)=0$ olduğu için 4 denedik)

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{nk} = x(0) + x(1) e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + x(2) e^{-j\frac{4\pi}{3}k}$$

$$w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$x(k=0)=1$, $x(k=1)=2-j$, $x(k=2)=-1$, $x(k=3)=2+j$ (Bu sonuçlar $N=4$ için)

Ex:



$f_s=100$ Hz, Genlik ve faz spektrumunu bulunuz. ($N=6$)

a) Üçgen pencere kullanarak $w_{tri}(n) = 1 - \frac{|2n-N+1|}{N-1}$, $0 \leq n \leq N-1$

b) Hanning penceresi kullanarak

c) Hanning penceresi kullanarak

$N=6$

$$w_{tri}(0) = 1 - \frac{|0-6+1|}{5} = 0$$

$$w_{tri}(1) = 1 - \frac{|2-6+1|}{5} = \frac{2}{5}$$

$$w_{tri}(2) = 1 - \frac{|4-6+1|}{5} = \frac{4}{5}$$

$$w_{tri}(3)$$

$$w_{tri}(4)$$

$$w_{tri}(5)$$

$$w_{tri}(6)$$

$$X_w(0) = x(0) \cdot w(0)$$

$$X_w(1) = x(1) \cdot w(1)$$

$$X_w(2) = x(2) \cdot w(2)$$

$$X_w(3) = x(3) \cdot w(3)$$

$$X_w(4) = x(4) \cdot w(4)$$

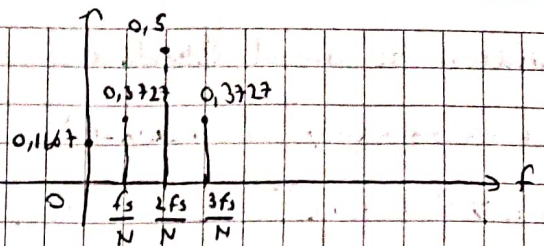
$$X_w(5) = x(5) \cdot w(5)$$

$$\tilde{A}_0 = \frac{1}{N} |x(k=0)| = 0,1667$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{2}{N} |x(k=1)| = 0,3727 \quad \left(\text{Dizilerin hepsinde } \frac{2}{N} \right) \quad \left(\text{Gici kesoplenken } \frac{2}{N^2} \text{ olur} \right)$$

$$\tilde{A}_2 = 0,5$$

$$\tilde{A}_3 = 0,3727$$



$$\frac{f_s}{N} = \frac{100}{6} \approx 16,66 \text{ Hz}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{nk}$$

15.04.2019

Forke Denlemi ve Sayısal Filtreleme

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_m x(n-m) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_N y(n-N)$$

x = Giris

y = Çıkış

Ex: $y(n) = 0,5 y(n-2) + x(n-1)$ çıkışın ilk 4 örneğini hesaplayınız.

$$a. y(-2) = 1, y(-1) = 0, x(-1) = -1$$

$$x(n) = 0,5^n u(n)$$

b. Başlangıç koşulları 0 $x(n) = 0,5^n \cdot u(n)$

$$a) y(0) = 0,5 y(-2) + x(-1) = 0,5 + (-1) = -0,5$$

$$y(1) = 0,5 y(-1) + x(0) = 0 + 1 = 1$$

$$y(2) = 0,5 y(0) + x(1) = -0,25 + 0,5 = 0,25$$

$$y(3) = 0,5 y(1) + x(2) = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

$$b) y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

$$y(2) = 0,5$$

$$y(3) = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

Not: Aygıt zamanlı bir sistemin (filtre) çıkışı notlab konutlarıyla aşağıdaki gibi bulunabilir.

$z_i = \text{filter}(B, A, Y_i, X_i);$ % Başlangıç koşullarından kaynaklanan çıkış

$y = \text{filter}(B, A, X, Z_i);$ % Başlangıç koşulu yoksa Z_i termi yazılmaz.

$$A = [1 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \dots a_N]$$

$$B = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \dots b_M]$$

$$Y_i = [y(-1) \quad y(-2) \quad y(-3) \dots]$$

$$X_i = [x(-1) \quad x(-2) \quad x(-3) \dots]$$

Ex: $y(n) = 2x(n) - 4x(n-1) - 0,5y(n-1) - y(n-2)$, $y(-2) = 1$, $y(-1) = 0$, $x(-1) = -1$, $x(n) = 0,8^n u(n)$

çıkışın ilk 20 örneğini Matlab ile bulunuz.

$$b_0 = 2;$$

$$b_1 = -4;$$

$$a_1 = 0,5;$$

$$a_2 = 1;$$

$$y_i = [0 \ 1];$$

$$x_i = [-1];$$

$$B = [b_0 \ b_1];$$

$$A = [1 \ a_1];$$

$$n = 0:1:19;$$

$$x = 0,8.^n$$

→ dizinin her elemanının ile ağırlıklanmasını sağlar

$$z_i = \text{filter}(b, A, y_i, x_i);$$

$$u = \text{filter}(b, A, x, z_i);$$

$$\text{stem}(n, u);$$



→ stem komutu olan verilerin şeklinde çizer.
örnek sayısı az aldığımız zaman kullanılır örnek
sayısı fazla ise farklı bir komut kullanılabilir.

Transfer Fonksiyonu

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_m x(n-m) - a_1 y(n-1) - \dots - a_N y(n)$$

$$Y(z) = b_0 X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - \dots - a_N z^{-N} Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} : \text{Transfer fonksiyonu}$$

Ex: $y(n) = x(n) - x(n-2) - 1,3y(n-1) - 0,36y(n-2) \Rightarrow H(z) = ?$
 $b_0 = 1 \quad b_1 = -1 \quad a_1 = 1,3 \quad a_2 = 0,36$

$$Y(z) = X(z) - z^{-2} X(z) - 1,3 z^{-1} Y(z) - 0,36 z^{-2} Y(z)$$

$$Y(z) (1 + 1,3 z^{-1} + 0,36 z^{-2}) = X(z) (1 - z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1,3 z^{-1} + 0,36 z^{-2}}$$

Ex: a. $H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1,3z + 0,36}$

b. $H(z) = \frac{z^2 - 0,5z + 0,36}{z^2}$

fark dağlıkları = ?

a) $H(z) = \frac{(z^2 - 1) \cdot \frac{1}{z^2}}{(z^2 + 1,3z + 0,36) \cdot \frac{1}{z^2}} = \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + 1,3z^{-1} + 0,36z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$\begin{matrix} b_0=1 & b_1=-1 \\ \uparrow & \uparrow \\ 1 & - & z^{-2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ a_1=1,3 & a_2=0,36 \end{matrix}$

$$(1 - z^{-2})X(z) = (1 + 1,3z^{-1} + 0,36z^{-2})Y(z)$$

$$x(n) - x(n-2) = y(n) + 1,3y(n-1) + 0,36y(n-2)$$

$$y(n) = x(n) - x(n-2) - 1,3y(n-1) - 0,36y(n-2)$$

b) $H(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1} + 0,36z^{-2}}{1}$ $y(n) = x(n) - 0,5x(n-1) + 0,36x(n-2)$

$\begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & -0,5 & +0,36 & z^{-2} \end{matrix}$

Not: Transfer fonksiyonu $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ 'nin payını sıfır yapan z değerlerine "0", paydasını 0 yapan z değerlerine kutup denir.

Ex: $H(z) = \frac{1 - z^2}{1 + 1,3z^{-1} + 0,36z^{-2}}$ kutup ve sıfırları bul.

$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1,3z + 0,36} = \frac{(z-1)(z+1)}{(z+0,4)(z+0,9)}$ Kutuplar: $z = -0,4, z = -0,9$

Sıfırlar: $z = 1, z = -1$

Birim basamak ve birim vuruş tepkisinin bulunmasıyla ilgili örnekler

Ex: $H(z) = \frac{z+1}{z-0,5}$ a. Birim basamak tepkisi = ?

b. Birim vuruş tepkisi = ?

a. $x(n) = u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}$

$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{(z+1)}{(z-0,5)} \cdot \frac{z}{(z-1)}$ $\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-0,5)(z-1)} = \frac{A}{z-0,5} + \frac{B}{z-1}$ $A = -3$ $B = 4$

$Y(z) = \frac{-3z}{z-0,5} + \frac{4z}{z-1} \Rightarrow y(n) = (-3)0,5^n \cdot u(n) + 4u(n)$: Birim basamak tepkisi

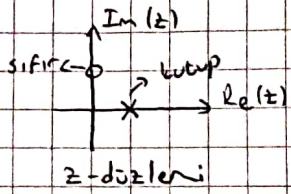
b. $x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(z) = 1$

$Y(z) = H(z) = \frac{z+1}{z-0,5}$ $\frac{Y(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-0,5)} = \frac{C}{z} + \frac{D}{z-0,5}$ $C = -2$ $D = 3$

$Y(z) = -2 + \frac{3z}{z-0,5} \Rightarrow y(n) = -2\delta(n) + 3(0,5)^n \cdot u(n)$ Birim vuruş tepkisi

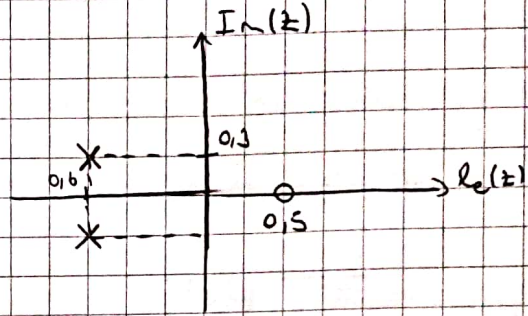
z-Düzlemi ve Kutup - Sıfır Gösterimi:

$z \rightarrow$ karmaşık sayı



Örnek: $H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5z^{-2}}{1 + 1.2z^{-1} + 0.45z^{-2}}$

$$H(z) = \frac{z - 0.5}{z^2 + 1.2z + 0.45} = \frac{z - 0.5}{(z + 0.6 - j0.3)(z + 0.6 + j0.3)}$$



Kararlılık: Kuantalanan bir signalin ayrık zamanlı biçimi aşağıdaki gibidir.

$$x_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \dots$$

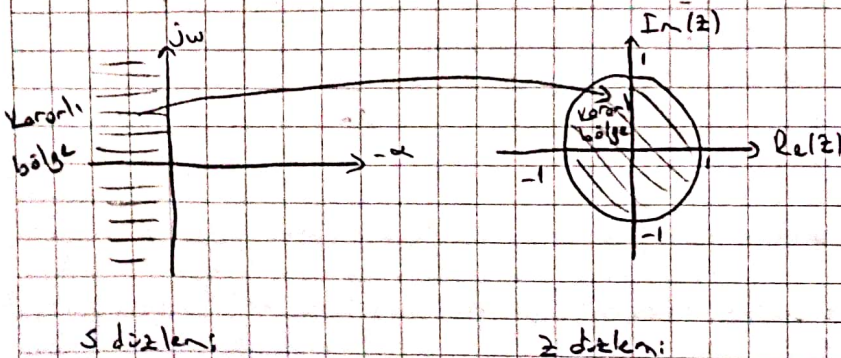
$$\mathcal{L}[x_s(t)] = x(0) + x(T)e^{-sT} + x(2T)e^{-2sT} + x(3T)e^{-3sT} + \dots$$

$$x(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \underbrace{(e^{-sT})^{-n}}_n$$

$$z = e^{sT}$$

$$s = -\alpha \pm j\omega \Rightarrow z = e^{-\alpha T} e^{\pm j\omega T} = e^{-\alpha T} \angle \pm \omega T$$

Sürekli zamanlı bir sistemin kararlılığı, sistemin nedensel ise (genelde nedensel olur) en büyük kutubundan sağa doğru olan bölgedir. Sistemin kararlı olabilmesi için kutubunun gerçel kısmının $(-\alpha) < 0$ olması gerekir. $-\alpha < 0 \Rightarrow |z| < 1$ olacaktır. Yani ayrık zamanlı bir sistemin kararlı olması z-düzlemindeki birim çemberin içinde kutuplarının olmasına bağlıdır.



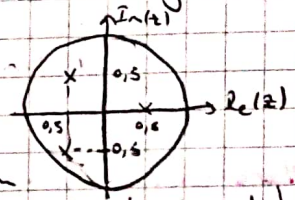
1. $H(z)$ 'nin kutupları birim çemberin içinde ise sistem kararlıdır.
2. $H(z)$ 'nin kutupları birim çemberin dışında ise sistem kararsızdır.
3. En dıştaki kutup tek katlı ve birim çemberin üstünde ise sistem marginal kararlıdır.
4. En dıştaki kutup çok katlı ve birim çemberin üstünde ise sistem kararsızdır.
5. Sıfırların kararlılığı etkisi yoktur.

Marginal kararlı bir sistemin birim vuruş tepkisi ya sabit bir seviyede kalır yada iki sınırlı değer arasında dalgalanır. (0 zaman vuruş kararlılığına vuruş, süre sınırlı değilse sonsuza kadar dalgalanır.)

Ex: Aşağıdaki sistemlerin kararlılığını belirleyin.

a. $H(z) = \frac{z+0,5}{(z-0,5)(z^2+z+0,5)}$

kutuplar $z=0,5$, $z=-0,5 \pm j0,5$ (kutuplar birim çemberin içinde olduğundan kararlı.)

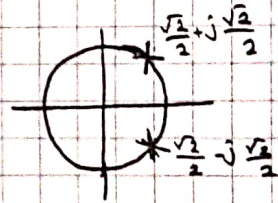


b. $H(z) = \frac{z^2+0,25}{(z-0,5)(z^2+jz+2,5)}$

kutuplar $z=0,5$, $z=-1,5 \pm j0,5$ (birim çember dışında olur, kararsız.)

c. $H(z) = \frac{z+0,5}{(z-0,5)(z^2+1,414z+1)}$

kutuplar $z=0,5$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Marginal kararlı)



d. $H(z) = \frac{z^2+z+0,5}{(z-1)^2(z+1)(z-0,6)}$

$z=1$ (çift kök) $z=-1$ $z=0,6$
kararsız

Sayısal Filtre Frekans Tepkisi

Süretili zamanlı sistemde frekans tepkisi $H(s) \Big|_{s=j\omega}$ ile bulunur.

Ayrık zamanlı sistem frekans tepkisi $H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}$

$$z = e^{j\omega T}$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\frac{\omega T}{2\pi} \text{ (rad/s} \times \frac{1}{\text{s}} \text{)} , \quad \omega T : \text{Açık} \quad \omega T = 2\pi \Rightarrow 2\pi f = 2\pi \quad f = \frac{1}{T} f_s$$

$\omega T = 2\pi$ 'daki 2π açısı değerleri $0-\pi$ aralığında alınmalıdır. Çünkü $2 = \pi \Rightarrow f = \frac{\pi}{2\pi} f_s = \frac{f_s}{2}$

olacağından, DAC'da bulunan reconstruction (tekler yeniden yapılandırma) (alacak geçen) filtresi $\frac{f_s}{2}$ 'den büyük frekansları geçirmeyecektir.

22.04.2019

Ayrıca $H(e^{j\Omega})$ periyodiktir. ve periyodu 2π dir.

Örnek: $y(n) = 0,5 x(n) + 0,5 x(n-1)$ frekans tepkisini bulunuz. ($f_s = 8 \text{ kHz}$). (y'li terim olmadığ. için FIR dir)

$$Y(z) = 0,5 X(z) + 0,5 z^{-1} X(z)$$

$$= X(z) (0,5 + 0,5 z^{-1})$$

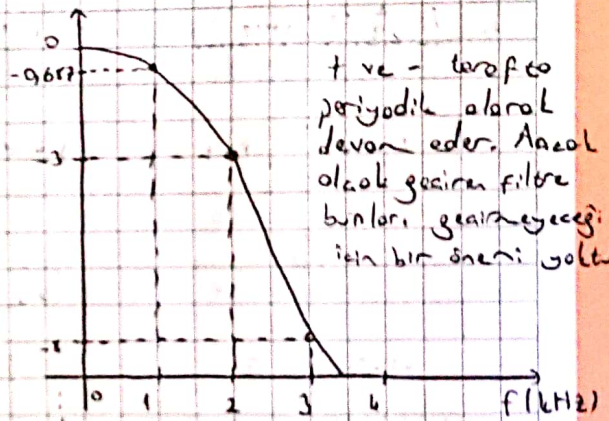
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = 0,5 + 0,5 z^{-1}$$

$$H(e^{j\Omega}) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega}) = 0,5 + 0,5 e^{-j\Omega} = 0,5 + 0,5 \cos \Omega - j 0,5 \sin \Omega$$

$$|H(e^{j\Omega})| = \sqrt{(0,5 + 0,5 \cos \Omega)^2 + (0,5 \sin \Omega)^2}$$

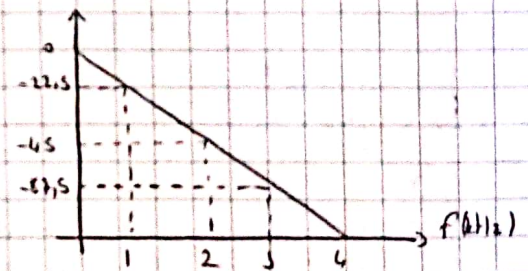
$$\angle H(e^{j\Omega}) = \arctan \left(\frac{-0,5 \sin \Omega}{0,5 + 0,5 \cos \Omega} \right)$$

Ω	$f = \frac{\Omega}{2\pi} \cdot f_s$	$ H(e^{j\Omega}) $	$ H(e^{j\Omega}) \text{ dB}$	$\angle H(e^{j\Omega})$
0	0	1	0 dB	0°
$\pi/4$	1000	0,824	-0,687 dB	$-22,5^\circ$
$\pi/2$	2000	0,707	-3,012 dB	$-45,0^\circ$
$3\pi/4$	3000	0,513	-8,336 dB	$-67,5^\circ$
π	4000	0	$-\infty$	-90°

 $|H(e^{j\Omega})| \text{ dB}$


simdiki değer + önceki değer = çıkış alırsa

Filtre olarak geçen filtredir.



Örnek: $y(n) = x(n) - 0,5y(n-1)$; $f_s = 8 \text{ kHz}$ frekans tepkisini bulalım

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{1}{1 + 0,5 z^{-1}}$$

$$Y(z) = X(z) - 0,5 z^{-1} Y(z)$$

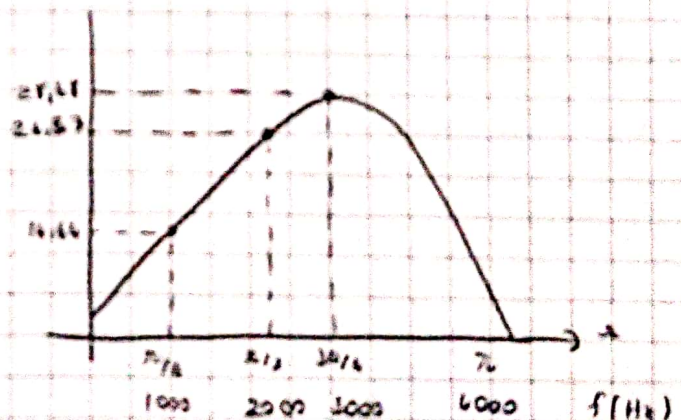
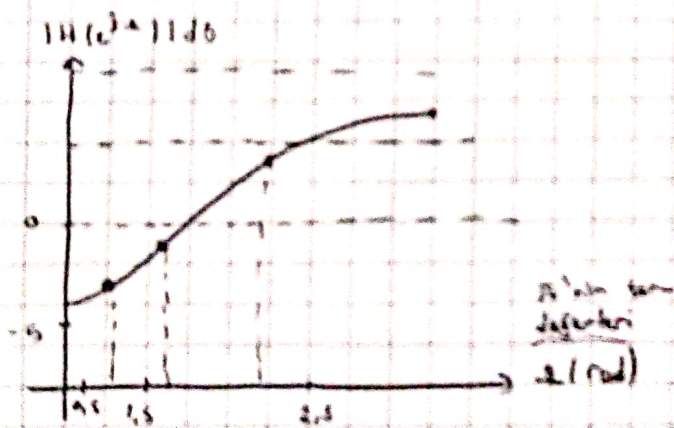
$$Y(z) (1 + 0,5 z^{-1}) = X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 0,5 z^{-1}}$$

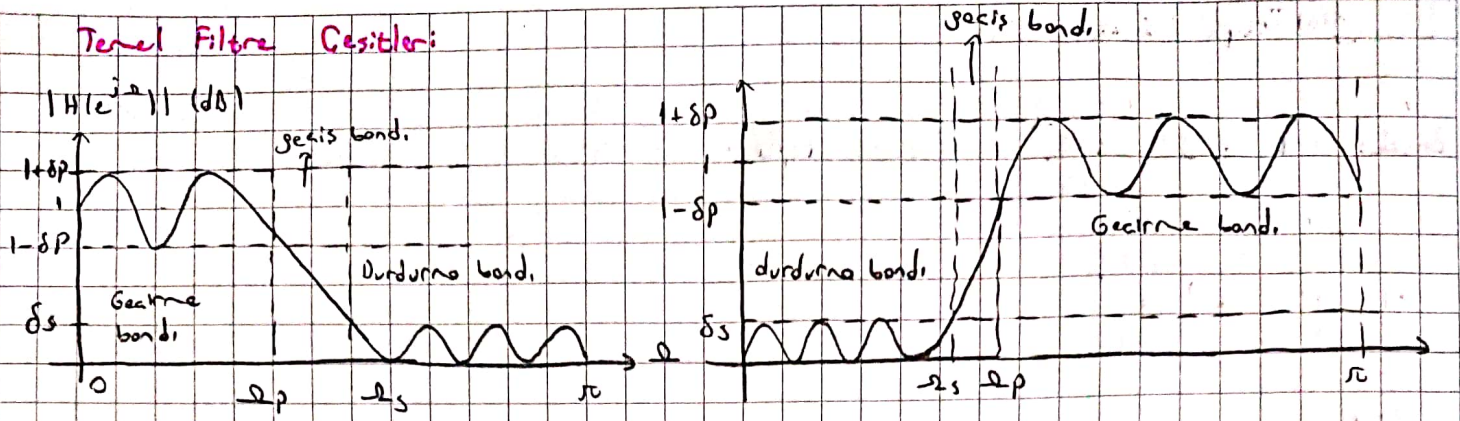
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 + 0,5 e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 + 0,5 \cos \Omega - j 0,5 \sin \Omega}$$

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1 + 0,5 \cos \Omega)^2 + (0,5 \sin \Omega)^2}} \quad \angle H(e^{j\Omega}) = -\arctan \left(\frac{-0,5 \sin \Omega}{1 + 0,5 \cos \Omega} \right)$$

Ω	$f = \frac{\Omega}{2\pi} f_s$	$ H(e^{j\Omega}) $	$ H(e^{j\Omega}) \text{ (dB)}$	$\angle H(e^{j\Omega})$
0	0	0,670	-3,475 dB	0
$\pi/4$	1000	0,715	-2,916 dB	$16,66^\circ$
$\pi/2$	2000	0,856	-0,573 dB	$26,5^\circ$
$3\pi/4$	3000	1,257	2,132 dB	$26,41^\circ$
π	4000	2	6,021 dB	0°

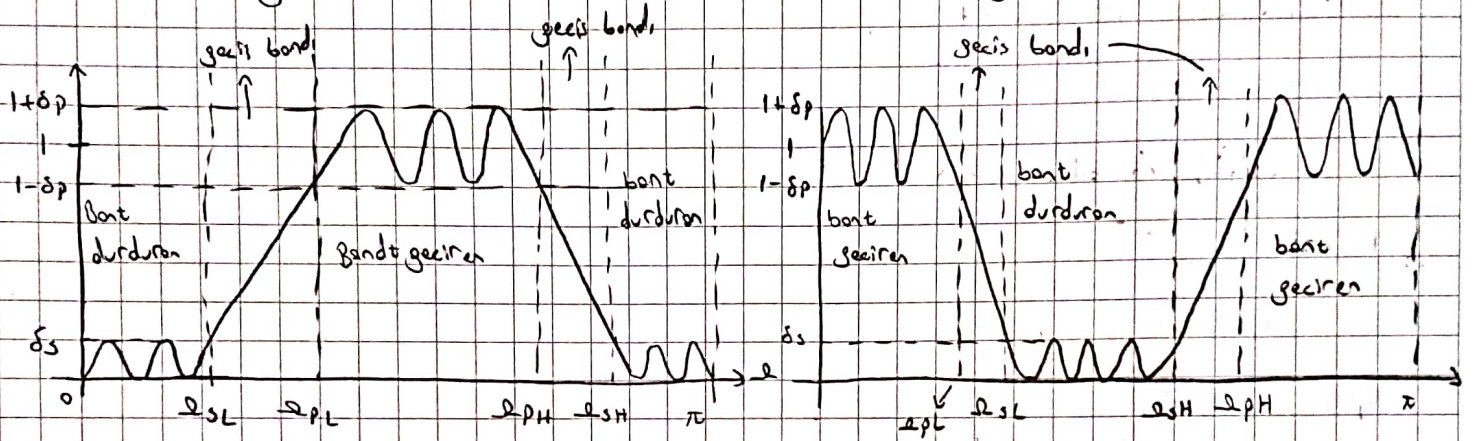


Temel Filtre Özellikleri



Alçak geçiren filtre

Yüksek geçiren filtre



ω_p : Kesir frekansı,

ω_{pH} : üst kesir frekansı,

ω_s : Durdurma frekansı,

ω_{sH} : alt durdurma frekansı,

ω_{sL} : Alt durdurma frekansı,

ω_{pL} : Alt kesir frekansı,

Frekans Tepkisinin Modüllü Bulunması

$\text{freqz}(B, A, N)$;

$\text{freqz}(B, A, N, fs)$;

$B = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_M]$;

$A = [1 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]$;

N : Adım büyüklüğüne gösteren parametre (nokta sayısı)

π/N : Adım büyüklüğü

$[h, w] = \text{freqz}(B, A, N)$;

$H(e^{j\omega})$ O ile π arasındaki π/N adımlarla elde edilen z değerleri

$H(z)$ $\rightarrow \frac{1}{2N} f_s$ adimlar $0 - \frac{f_s}{2}$ arasındaki frekans değerleri

$[h, f] = \text{freqz}(D, A, N, f_s);$

Örnek: $H(z) = \frac{0,5z^2 - 0,32}{z^2 + 0,5z + 0,25}$

Frekans tepkisini Matlab yardımıyla bulalım

$D = [0,5 \quad 0 \quad -0,32]$

$A = [1 \quad -0,5 \quad 0,25]$

$N = 2000;$

çizdirme $\leftarrow \text{freqz}(D, A, N);$ % Genlik ve faz tep

$[h, w] = \text{freqz}(D, A, N);$

$aci = \text{angle}(h);$ % radyan cinsinden aci değerleri

$genlik = \text{abs}(h);$

$aci = aci * 180 / \pi;$ % derece cinsinden aci değerleri

$\text{subplot}(2, 1, 1);$

$\text{plot}(w, 20 * \log_{10}(\text{genlik}));$ % genlik tepkisi

$\text{subplot}(2, 1, 2);$

$\text{plot}(w, aci);$

Filtrelerin Gerçekleştirilmesi

Direct form-I

Direct form-II

Transposed Direct form-II

Parallel

Cascade

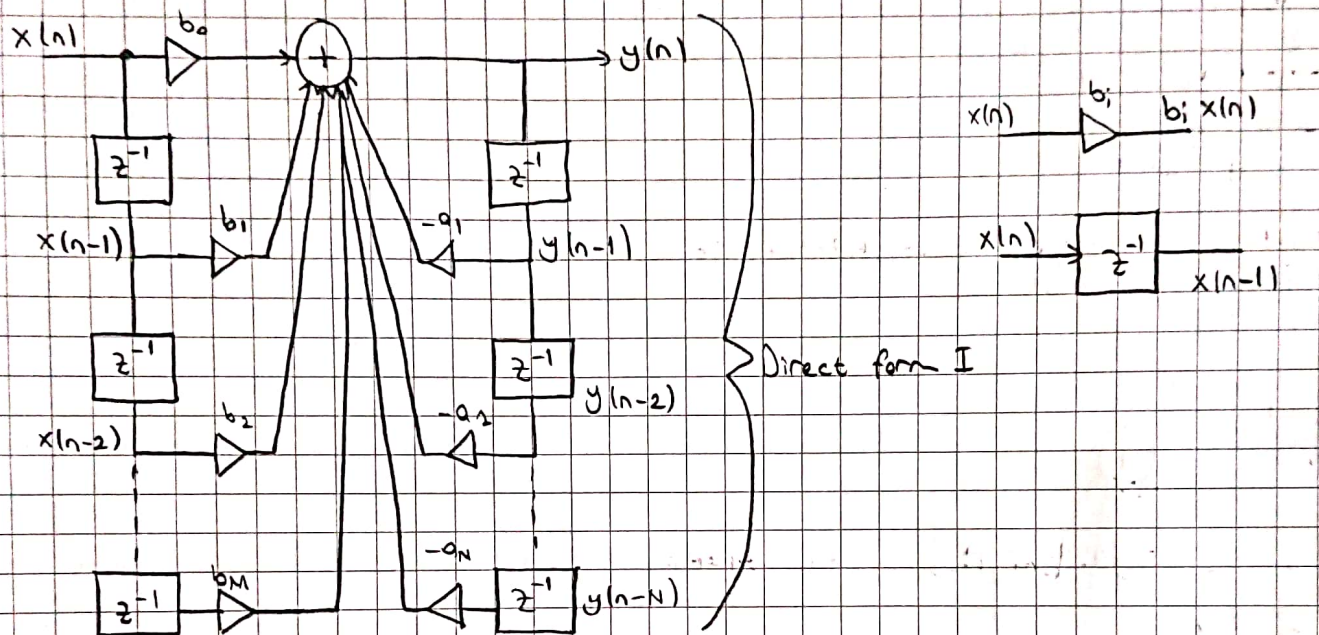
Filtrelerin gerçekleştirme yöntemleri

Direct Form I

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z) = \left(\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \right) X(z)$$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_N y(n-N)$$



Direct form II

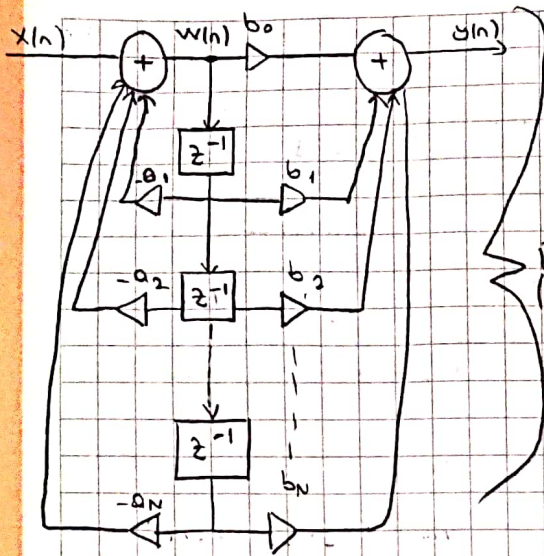
$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot X(z) = \left(\frac{X(z)}{A(z)} \right) B(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}) \underbrace{\frac{X(z)}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}}_{W(z)}$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}) W(z)$$

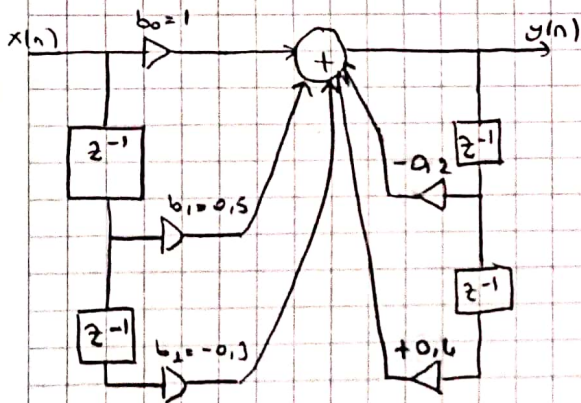
$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + \dots + b_M w(n-M)$$

$$w(n) = x(n) - a_1 w(n-1) - a_2 w(n-2) - \dots - a_N w(n-N)$$



Direct form II
(Daha hızlı)

Örnek: $b_0=1$, $a_1=0,2$, $a_2=-0,4$ olan filtreyi direct form I ile gerçekleştiriniz.
 $b_1=0,5$, $b_2=-0,3$



$$y(n) = x(n) + 0,5x(n-1) - 0,3x(n-2) - 0,2y(n-1) + 0,4y(n-2)$$

$b_0=1$;
 $b_1=0,5$;
 $b_2=-0,3$;
 $a_1=0,2$;
 $a_2=-0,4$

$x = [0 \ 0]$; $y = [0 \ 0]$; % Başlangıç değerleri
 $x(n-1)$ $x(n-2)$ $y(n-1)$ $y(n-2)$

while(1) % sonsuz döngü oluşturur

düğü
 $(x(n))$ giristen okunan sonki örneği

$x1 = \text{input}$ % giristen 1 örnek oku işlenir; y op sonra
 yeni bir değeri
 $yout = b_0 * x1 + b_1 * x(1) + b_2 * x(2) - a_1 * y(1) - a_2 * y(2);$

$x(2) = x(1);$
 $x(1) = x1;$
 $y(2) = y(1);$
 $y(1) = yout;$
 end;

üstteki program genelleştirilmiştir hali

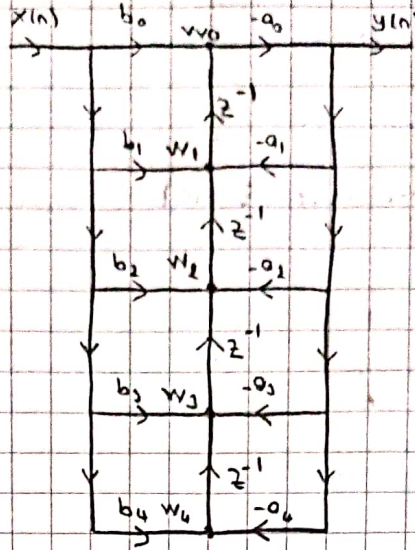
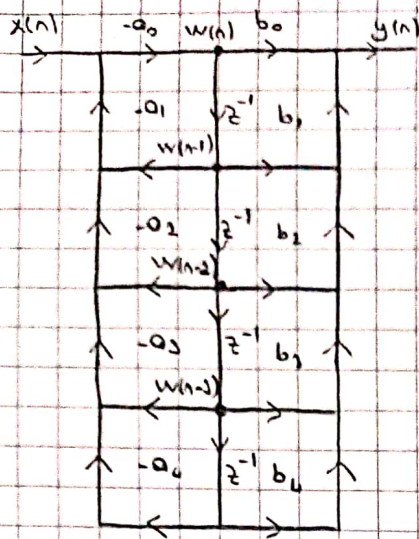
$B = [1 \ 0,5 \ -0,3];$ $b_0=1$;
 $A = [-0,2 \ 0,4];$ a_1 a_2

$x = [0 \ 0];$
 $y = [0 \ 0];$ $x_0 = 0$;
 $N = 2$; % a kat sayıları
 $M = 2$; % b
 while(1); $x_1 = \text{input};$
 for $k = 1:N$

$x_a = x_a + B(k) * x(k)$
 end;
 $x_a = x_a + b_0 * x_1;$
 for $k = 1:M$
 $x_a = x_a + A(k) * y(k);$
 end;
 for $k = N:2$
 $x(k+1) = x(k)$
 $x(k) = x(k-1);$
 end;

X

Transposed Direct Form - II



Transposed direct form - II

$$y(n) = w_0(n) + b_0 x(n)$$

$$w_1(n) = -a_1 w_0(n) + w_2(n-1) + b_1 x(n)$$

$$w_2(n) = -a_2 w_0(n) + w_3(n-1) + b_2 x(n)$$

$$w_3(n) = -a_3 w_0(n) + w_4(n-1) + b_3 x(n)$$

$$w_4(n) = -a_4 w_0(n) + b_4 x(n)$$

$$y(n) = w_0(n)$$

Direct form II'nin farklı bir gösterimini.

Transposed direct form - II

5 adet a katsayısı

5 adet b katsayısı

* Transposed direct form II, direct form II kullanılarak elde edilebilir. Bunun için direct form II'nin blok şemasında bazı değişiklikler yapmak gerekir.

- Her çizgideki elemanı ilk sıra sonuna ters çevrilir.

- Aynı işler ağındındaki gibi yeni çizgilere atanır.

Şekildeki örneğe ilişkin program

```
w1=0; w2=0; w3=0; w4=0;
```

```
for k=1:npts % npts giristen gelen örnek sayısı
```

```
    w0=w1+b0*x;
```

```
    w1=-a1*w0+w2+b1*x;
```

```
    w2=-a2*w0+w3+b2*x;
```

```
    w3=-a3*w0+w4+b3*x;
```

```
    w4=-a4*w0+b4*x;
```

```
    y=w0;
```

```
end;
```


Ex: $y(n) = x(n-1) - 0,75y(n-1) - 0,125y(n-2)$

$x(n) = 0,5^n \cdot u(n)$ için $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 'e karşılık gelen çıkışları $x(-1) = -1$, $y(-2) = 2$, $y(-1) = 1$ için hesapla.

z dönüşümü ile çözelim

$$Y(z) = \frac{x(-1)}{-1} + \frac{z^{-1}x(z)}{1-0,5z^{-1}} - 0,75 \frac{y(-1)}{1} - 0,75 \frac{z^{-1}Y(z)}{1-0,5z^{-1}} - 0,125 \frac{y(-2)}{2} - 0,125 \frac{y(-1)}{1} z^{-1} - 0,125 z^{-2} Y(z)$$

$$x(n) = 0,5^n \cdot u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-0,5z^{-1}}$$

$$Y(z) = (-1) + z^{-1} \frac{1}{1-0,5z^{-1}} - 0,75 - 0,75 z^{-1} Y(z) - (0,125 \times 2) - 0,125 \cdot z^{-1} - 0,125 z^{-2} Y(z)$$

$$Y(z) = Y(z) (-0,75z^{-1} - 0,125z^{-2}) - 2 - 0,125z^{-1} + \frac{z^{-1}}{1-0,5z^{-1}}$$

$$Y(z) \underbrace{(1+0,75z^{-1}+0,125z^{-2})}_M = -2 - 0,125z^{-1} + \frac{z^{-1}}{1-0,5z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{-2}{M} - \frac{0,125z}{z^2+0,75z+0,125} + \frac{z^2}{(z-0,5)(z^2+0,75z+0,125)}$$

$z_1 = -\frac{1}{4} \quad z_2 = -\frac{1}{2}$

$$\frac{0,125z}{z^2+0,75z+0,125} = \frac{0,125}{\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{z+\frac{1}{4}} + \frac{b}{z+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{z^2}{(z-0,5)(z^2+0,75z+0,125)} = \frac{c}{z-0,5} + \frac{d}{z+\frac{1}{4}} + \frac{f}{z+\frac{1}{2}}$$

Ex: $y(n) = 0,5x(n) + 0,5x(n-1)$

a. $H(z) = ?$

b. $x(n) = 4\delta(n) \Rightarrow y(n) = ?$

c. $x(n) = 10u(n) \Rightarrow y(n) = ?$

a. $H(z) = 0,5 + 0,5z^{-1}$

b. $x(n) = 4\delta(n) \Rightarrow X(z) = 4 \quad Y(z) = X(z) \cdot H(z) \Rightarrow 4 \cdot H(z) \quad Y(z) = 2 + 2z^{-1} \quad y(n) = 2\delta(n) + 2\delta(n-1)$

c. $x(n) = 10u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{10z}{z-1} \quad Y(z) = X(z) \cdot H(z) = (0,5 + 0,5z^{-1}) \frac{10z}{z-1} = \frac{5z}{z-1} + \frac{5}{z-1}$

$\frac{Y(z)}{z} = \frac{5z+5}{z(z-1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} \quad A = -5 \quad Y(z) = -5 + \frac{10z}{z-1} = -5\delta(n) + 10u(n)$

Ex: Aşağıdaki sistemlerin kutup sıfır diyagramlarını çizip kararlılıklarını inceleyelim.

a. $H(z) = \frac{z - 0,5}{(z + 0,25)(z^2 + z + 0,8)}$

b. $H(z) = \frac{z^2 + 0,25z}{(z - 0,5)(z^2 + 4z + 7)}$

c. $H(z) = \frac{z + 0,85}{(z + 0,2)(z^2 + 1,414z + 1)}$

d. $H(z) = \frac{z^2 + z + 0,25}{(z - 1)(z + 1)^2(z - 0,36)}$

Ex: Verilen transfer fonksiyonlarını kullanarak fark denklemlerini elde ediniz

a) $H(z) = \frac{z^2 - 0,25}{z^2 + 1,1z + 0,18}$

b) $H(z) = \frac{z^2 - 0,1z + 0,3}{z^3}$

a. $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - 0,25}{z^2 + 1,1z + 0,18} = \frac{1 - 0,25z^{-2}}{1 + 1,1z^{-1} + 0,18z^{-2}}$

$\Rightarrow Y(z)(1 + 1,1z^{-1} + 0,18z^{-2}) = X(z)(1 - 0,25z^{-2})$
 $y(n) + 1,1y(n-1) + 0,18y(n-2) = x(n) - 0,25x(n-2)$

b. $H(z) = \frac{z^2 - 0,1z + 0,3}{z^3}$

$H(z) = z^{-1} - 0,1z^{-2} + 0,3z^{-3}$

$y(n) = x(n-1) - 0,1x(n-2) + 0,3x(n-3)$

Ex: $y(n) = 0,5x(n) + 0,5x(n-2)$ (FIR filteridir) $f_s = 8000$

a. Determine frequency response

b. Calculate and plot magnitude and phase response

c. Determine the filter type

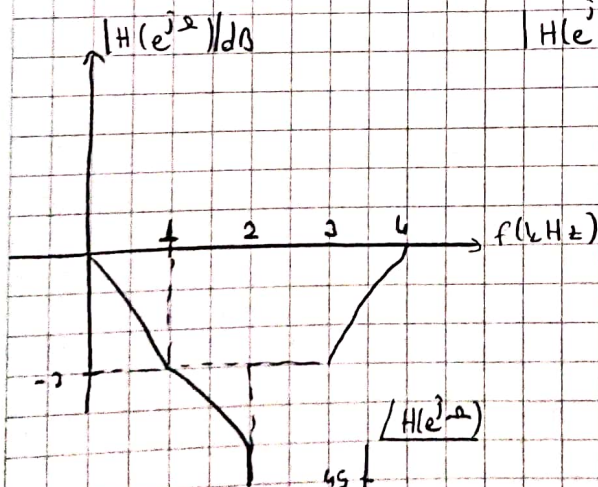
a. $Y(z) = 0,5X(z) + z^{-2}0,5X(z)$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0,5 + 0,5z^{-2}$

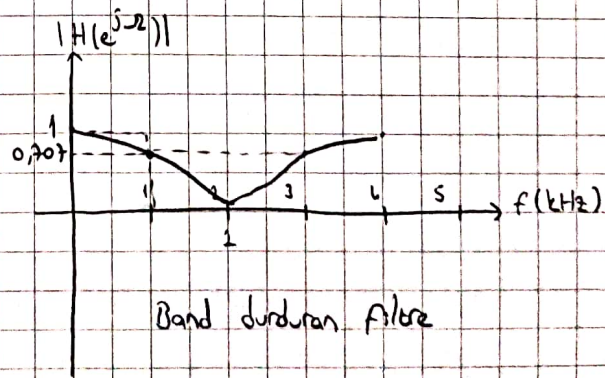
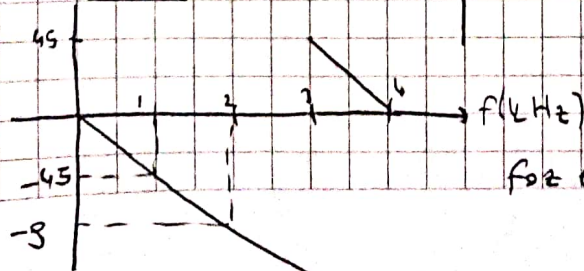
$H(e^{j\omega}) = 0,5 + 0,5e^{-2j\omega}$

ω	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
f	0	$f = \frac{\omega}{2\pi} f_s = 1000 \text{ Hz}$	2000	3000	4000
$ H(e^{j\omega}) $	1	0,707	0	0,707	1
$\angle H(e^{j\omega})$	0	-45°	-90°	45°	0
$ H(e^{j\omega}) \text{ dB}$	0	-3	$-\infty$	-3	0

$|H(e^{j\omega})| \text{ (dB)} = 20 \log(|H(e^{j\omega})|)$



$|H(e^{j\omega})|$



Band durduran filtre

forç tepkisi

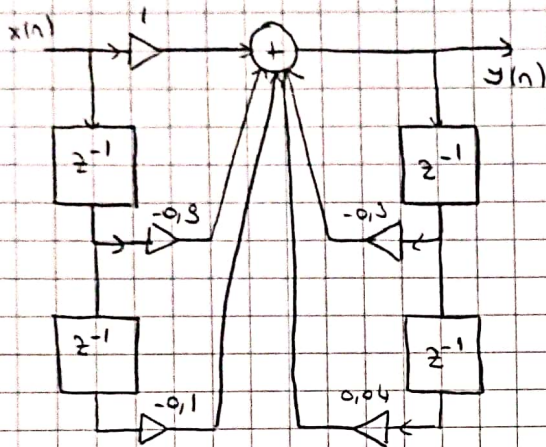
Ex: Verilen transfer fonksiyonuna göre filtrenin direct form I ve direct form II gerektiren ilâkîn diagramı çiziniz.

$$H(z) = \frac{1 - 0,9z^{-1} - 0,1z^{-2}}{1 + 0,3z^{-1} - 0,04z^{-2}}$$

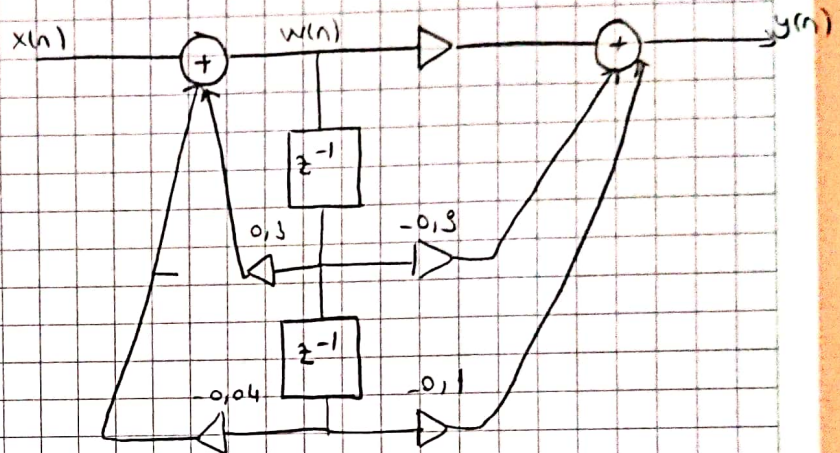
$$b_0 = 1, \quad b_1 = -0,9, \quad b_2 = -0,1$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0,3, \quad a_2 = -0,04$$

$$y(n) = x(n) + 0,9x(n-1) - 0,1x(n-2) - 0,3y(n-1) + 0,04y(n-2)$$



Direct form I



Direct form II

Direct form II'nin çıkarılması

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad Y(z) = B(z) \underbrace{\frac{X(z)}{A(z)}}_{w(z)}$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}) w(z) \quad a_2 = -0,04$$

$$y(n) = b_0w(n) + b_1w(n-1) + \dots + b_Mw(n-M)$$

$$w(z) = \frac{X(z)}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots} \Rightarrow w(z) (1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}) = X(z)$$

$$w(n) = x(n) - a_1w(n-1) - a_2w(n-2) - \dots$$