

15.04.2019

Fark Denklemleri ve Sayısal Filtreleme

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_N y(n-N)$$

$x =$ Giriş

$y =$ Çıkış

Ex: $y(n) = 0,5 y(n-2) + x(n-1)$ çıkışın ilk 4 örneğini hesaplayınız.

$$a) y(-2) = 1, y(-1) = 0, x(-1) = -1$$

$$x(n) = 0,5^n u(n)$$

b. Başlangıç koşulları 0 $x(n) = 0,5^n \cdot u(n)$

$$a) y(0) = 0,5 y(-2) + x(-1) = 0,5 + (-1) = -0,5$$

$$y(1) = 0,5 y(-1) + x(0) = 0 + 1 = 1$$

$$y(2) = 0,5 y(0) + x(1) = -0,25 + 0,5 = 0,25$$

$$y(3) = 0,5 y(1) + x(2) = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

$$b) y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

$$y(2) = 0,5$$

$$y(3) = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

Not: Ayırık zamanlı bir sistemin (filtre) çıkışı notlab konutlarıyla aşağıdaki gibi bulunabilir.

$z_i = \text{filter}(B, A, Y_i, X_i)$; % Başlangıç koşullarından kaynaklanan çıkış

$y = \text{filter}(B, A, X, Z_i)$; % Başlangıç koşulu yoksa Z_i termi yazılmaz.

$$A = [1 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \dots a_N]$$

$$B = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \dots b_M]$$

$$Y_i = [y(-1) \quad y(-2) \quad y(-3) \dots]$$

$$X_i = [x(-1) \quad x(-2) \quad x(-3) \dots]$$

Ex: $y(n) = 2x(n) - 4x(n-1) - 0,5y(n-1) - y(n-2)$, $y(-2) = 1$, $y(-1) = 0$, $x(-1) = -1$, $x(n) = 0,8^n u(n)$

çıkışın ilk 20 örneğini Matlab ile bulunuz.

$$b_0 = 2;$$

$$b_1 = -4;$$

$$a_1 = 0,5;$$

$$a_2 = 1;$$

$$y_i = [0 \ 1];$$

$$x_i = [-1];$$

$$B = [b_0 \ b_1];$$

$$A = [1 \ a_1];$$

$$n = 0:1:19;$$

$$x = 0,8.^n$$

→ dizinin her elemanının ile ağırlıklanmasını sağlar

$$z_i = \text{filter}(b, A, y_i, x_i);$$

$$y = \text{filter}(B, A, x, z_i);$$

$$\text{stem}(n, y);$$



→ stem komutu odn verilerin şeklinde çizer.
örnek sayısı az oldu-ğu zaman kullanılır. örnek sayısı fazla ise farklı bir komutu kullanılabilir.

Transfer Fonksiyonu

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_m x(n-m) - a_1 y(n-1) - \dots - a_N y(n)$$

$$Y(z) = b_0 X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z) - a_1 z^{-1} Y(z) - \dots - a_N z^{-N} Y(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \quad \text{: Transfer fonksiyonu}$$

Ex: $y(n) = x(n) - x(n-2) - 1,3y(n-1) - 0,36y(n-2) \Rightarrow H(z) = ?$
 $b_0 = 1 \quad b_1 = -1 \quad a_1 = 1,3 \quad a_2 = 0,36$

$$Y(z) = X(z) - z^{-2} X(z) - 1,3 z^{-1} Y(z) - 0,36 z^{-2} Y(z)$$

$$Y(z) (1 + 1,3 z^{-1} + 0,36 z^{-2}) = X(z) (1 - z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1,3 z^{-1} + 0,36 z^{-2}}$$

Ex: a. $H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1,3z + 0,36}$

b. $H(z) = \frac{z^2 - 0,5z + 0,36}{z^2}$

fark dekları mı?

a) $H(z) = \frac{(z^2 - 1) \cdot \frac{1}{z^2}}{(z^2 + 1,3z + 0,36) \cdot \frac{1}{z^2}} = \frac{1 - \frac{1}{z^2}}{1 + 1,3z^{-1} + 0,36z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$b_0 = 1$ $b_1 = -1$
 \uparrow \uparrow
 $1 - \frac{1}{z^2}$
 \downarrow \downarrow
 $a_1 = 1,3$ $a_2 = 0,36$

$(1 - z^{-2})X(z) = (1 + 1,3z^{-1} + 0,36z^{-2})Y(z)$

$x(n) - x(n-2) = y(n) + 1,3y(n-1) + 0,36y(n-2)$

$y(n) = x(n) - x(n-2) - 1,3y(n-1) - 0,36y(n-2)$

b) $H(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1} + 0,36z^{-2}}{1}$ $y(n) = x(n) - 0,5x(n-1) + 0,36x(n-2)$

b_0 b_1 b_2
 \uparrow \uparrow \uparrow
 $1 - 0,5z^{-1} + 0,36z^{-2}$

Not: Transfer fonksiyonu $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ 'nin payını sıfır yapan z değerlerine "0", paydasını 0 yapan z değerlerine kutup denir.

Ex: $H(z) = \frac{1 - z^2}{1 + 1,3z^{-1} + 0,36z^{-2}}$ kutup ve sıfırları bul.

$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1,3z + 0,36} = \frac{(z-1)(z+1)}{(z+0,4)(z+0,9)}$ Kutuplar: $z = -0,4, z = -0,9$
 sıfırlar: $z = 1, z = -1$

Birim basamak ve birim vuruş tepkisinin bulunmasıyla ilgili örnekler

Ex: $H(z) = \frac{z+1}{z-0,5}$ a. Birim basamak tepkisi = ?

b. Birim vuruş tepkisi = ?

a. $x(n) = u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}$

$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{(z+1)}{(z-0,5)} \cdot \frac{z}{(z-1)} = \frac{Y(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-0,5)(z-1)} = \frac{A}{z-0,5} + \frac{B}{z-1}$ $A = -3$
 $B = 4$

$Y(z) = \frac{-3z}{z-0,5} + \frac{4z}{z-1} \Rightarrow y(n) = (-3)0,5^n \cdot u(n) + 4u(n)$: Birim basamak tepkisi

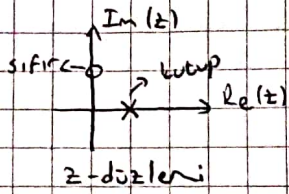
b. $x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(z) = 1$

$Y(z) = H(z) = \frac{z+1}{z-0,5} = \frac{Y(z)}{z} = \frac{z+1}{z(z-0,5)} = \frac{C}{z} + \frac{D}{z-0,5}$ $C = -2$
 $D = 3$

$Y(z) = -2 + \frac{3z}{z-0,5} \Rightarrow y(n) = -2\delta(n) + 3(0,5)^n \cdot u(n)$ Birim vuruş tepkisi

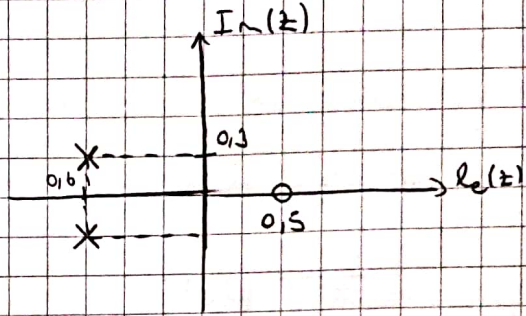
z-Düzlemi ve Kutup - Sıfır Gösterimi:

z → karmaşık sayı



Örnek: $H(z) = \frac{z^{-1} - 0,5z^{-2}}{1 + 1,2z^{-1} + 0,45z^{-2}}$

$$H(z) = \frac{z - 0,5}{z^2 + 1,2z + 0,45} = \frac{z - 0,5}{(z + 0,6 - j0,3)(z + 0,6 + j0,3)}$$



Kararlılık: Kuantalanan bir sistemin ayrık zamanlı biçimini aşağıdaki gibidir.

$$x_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t - T) + x(2T)\delta(t - 2T) + \dots$$

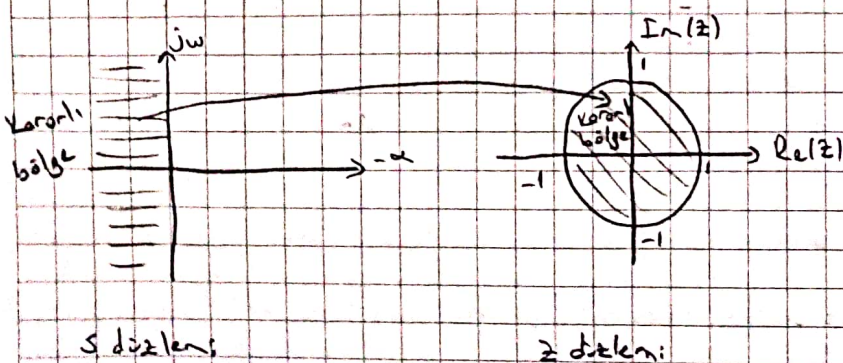
$$\mathcal{L}[x_s(t)] = x(0) + x(T)e^{-sT} + x(2T)e^{-2sT} + x(3T)e^{-3sT} + \dots$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \underbrace{(e^{-sT})^{-n}}_z$$

$$z = e^{sT}$$

$$s = -\alpha + j\omega \Rightarrow z = e^{-\alpha T} e^{j\omega T} = e^{-\alpha T} \angle \omega T$$

Sürekli zamanlı bir sistemin kararlılığı, sistemin nedensel ise (genelde nedensel olur) en büyük kutubundan sağa doğru olan bölgedir. Sistemin kararlı olabilmesi için kutubunun gerçel kısmının $(-\alpha) < 0$ olması gerekir. $-\alpha < 0 \Rightarrow |z| < 1$ olacaktır. Yani ayrık zamanlı bir sistemin kararlı olması z-düzlemindeki birim çemberin içinde kutuplarının olmasına bağlıdır.



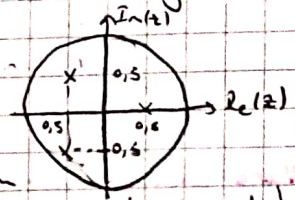
1. $H(z)$ 'nin kutupları birim çemberin içinde ise sistem kararlıdır.
2. $H(z)$ 'nin kutupları birim çemberin dışında ise sistem kararsızdır.
3. En distaki kutup tek katlı ve birim çemberin üstünde ise sistem marginal kararlıdır.
4. En distaki kutup çok katlı ve birim çemberin üstünde ise sistem kararsızdır.
5. Sıfırların kararlılığı etkisi yoktur.

Marginal kararlı bir sistemin birim vuruş tepkisi ya sabit bir seviyede kalır yada iki sınırlı değer arasında dalgalanır. (0 zaman viba kararlılığına yınar, süre sınırlı değilse sonsuza kadar dalgalanır.)

Ex: Aşağıdaki sistemlerin kararlılığını belirleyin.

a. $H(z) = \frac{z+0,5}{(z-0,5)(z^2+z+0,5)}$

kutuplar $z=0,5, z=-0,5 \pm j0,5$ (kutuplar birim çemberin içinde olduğundan kararlı.)

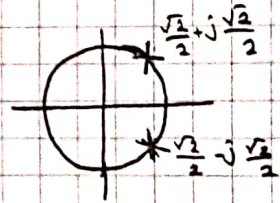


b. $H(z) = \frac{z^2+0,25}{(z-0,5)(z^2+jz+2,5)}$

kutuplar $z=0,5, z=-1,5 \pm j0,5$ (birim çember dışında olur, kararsız.)

c. $H(z) = \frac{z+0,5}{(z-0,5)(z^2+1,414z+1)}$

kutuplar $z=0,5, z = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Marginal kararlı)



d. $H(z) = \frac{z^2+z+0,5}{(z-1)^2(z+1)(z-0,6)}$

$z=1$ (çift kök) $z=-1, z=0,6$ kararsız

Sayısal Filtre Frekans Tepkisi:

Sürekli zamanlı sistemde frekans tepkisi $H(s) \Big|_{s=j\omega}$ ile bulunur.

Ayrık zamanlı sistem frekans tepkisi $H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}$

$$z = e^{st}$$

$$r = \omega \leq 30$$

$$\frac{\omega T}{\text{rad/san}} \quad (\text{rad/s} \times \frac{1}{s})$$

$$\omega T : \text{Ar}$$

$$\omega T = \Omega \Rightarrow 2\pi f = \Omega \quad f = \frac{\Omega}{2\pi} f_s$$

$\omega T = \Omega$ 'daki Ω olan değerleri $0-\pi$ aralığında almaktadır. Çünkü $\Omega = \pi \Rightarrow f = \frac{\pi}{2\pi} f_s = \frac{f_s}{2}$

olacağından, DAC'da bulunan reconstruction (tekerer yeniden yapılandırma) (çok geçiren) filtresi $\frac{f_s}{2}$ 'den büyük frekansları geçirmeyecektir.

Ayrıca $H(e^{j\omega})$ periyodiktir. ve periyodu 2π dir.

Örnekle: $y(n) = 0,5x(n) + 0,5x(n-1)$ frekans tepkisini bulunuz. ($f_s = 8 \text{ kHz}$). (y'li terim olmadığ. için FIR dir)

$$Y(z) = 0,5X(z) + 0,5z^{-1}X(z)$$

$$= X(z)(0,5 + 0,5z^{-1})$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = 0,5 + 0,5z^{-1}$$

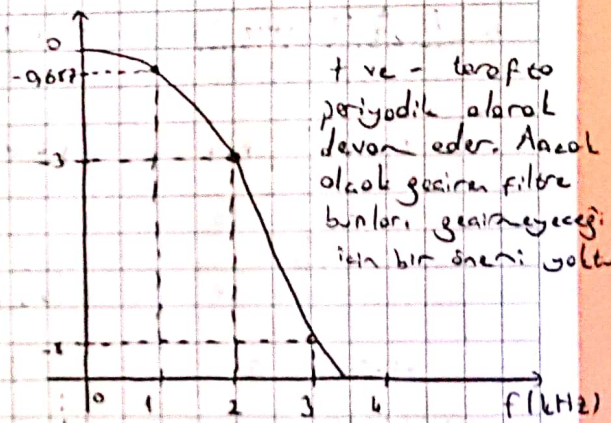
$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = 0,5 + 0,5e^{-j\omega} = 0,5 + 0,5\cos\omega - j0,5\sin\omega$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{(0,5 + 0,5\cos\omega)^2 + (0,5\sin\omega)^2}$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{-0,5\sin\omega}{0,5 + 0,5\cos\omega}\right)$$

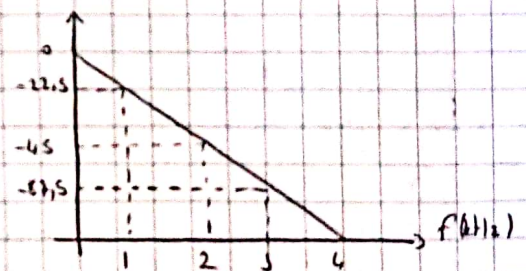
ω	$f = \frac{\omega}{2\pi} \cdot f_s$	$ H(e^{j\omega}) $	$ H(e^{j\omega}) \text{ (dB)}$	$\angle H(e^{j\omega})$
0	0	1	0 dB	0°
$\pi/4$	1000	0,824	-0,687 dB	$-22,5^\circ$
$\pi/2$	2000	0,707	-3,012 dB	$-45,0^\circ$
$3\pi/4$	3000	0,513	-8,336 dB	$-67,5^\circ$
π	4000	0	$-\infty$	-90°

$|H(e^{j\omega})| \text{ dB}$



simdiki değer + önceki değer = çıkış alırsa

filtre olarak geçiren filtredir.



Örnek: $y(n) = x(n) - 0,5y(n-1)$; $f_s = 8 \text{ kHz}$ frekans tepkisini bulalım

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{1}{1 + 0,5z^{-1}}$$

$$Y(z) = X(z) - 0,5z^{-1}Y(z)$$

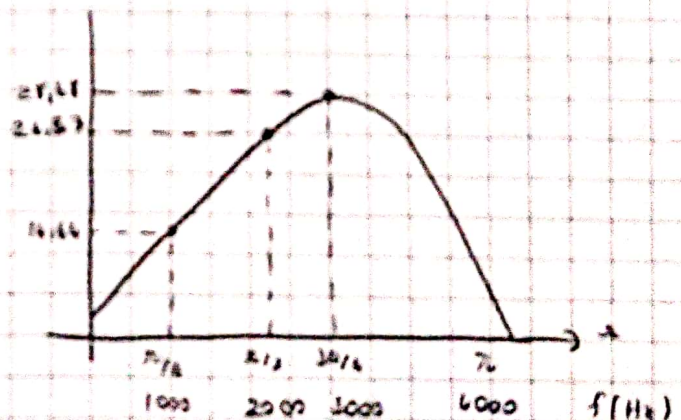
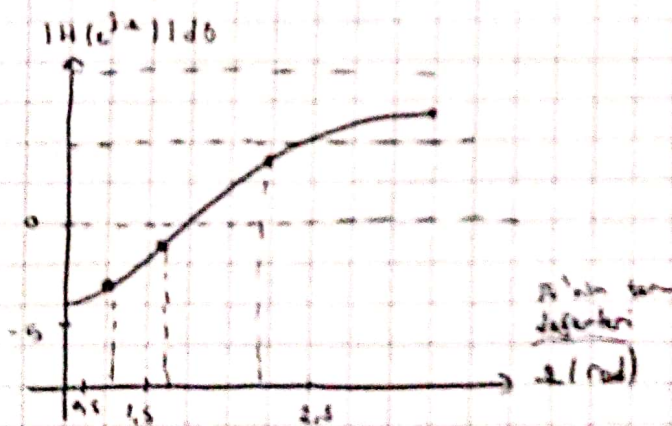
$$Y(z)(1 + 0,5z^{-1}) = X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 0,5z^{-1}}$$

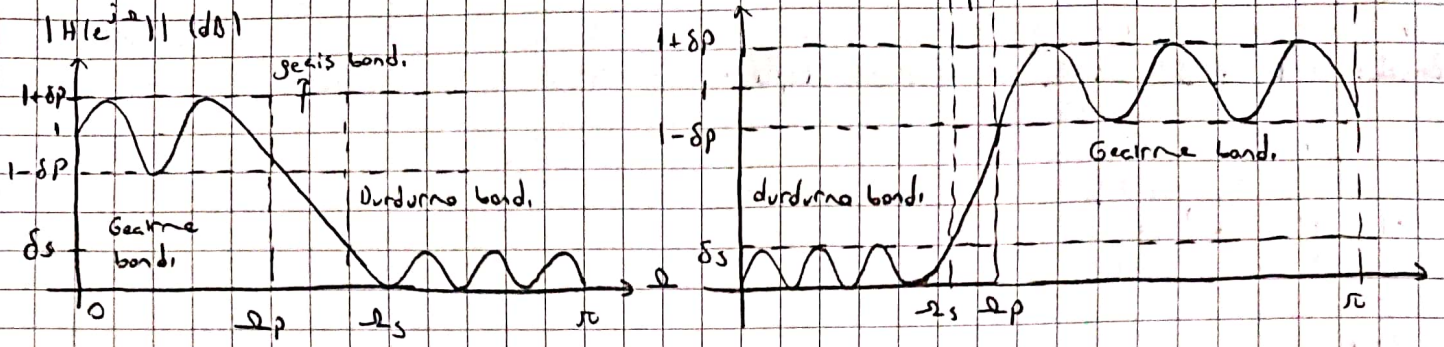
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 + 0,5e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 + 0,5\cos\Omega - j0,5\sin\Omega}$$

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1 + 0,5\cos\Omega)^2 + (0,5\sin\Omega)^2}} \quad \angle H(e^{j\Omega}) = -\arctan\left(\frac{-0,5\sin\Omega}{1 + 0,5\cos\Omega}\right)$$

Ω	$f = \frac{\Omega}{2\pi} f_s$	$ H(e^{j\Omega}) $	$ H(e^{j\Omega}) \text{ (dB)}$	$\angle H(e^{j\Omega})$
0	0	0,670	-3,475 dB	0
$\pi/4$	1000	0,715	-2,916 dB	$16,66^\circ$
$\pi/2$	2000	0,856	-0,973 dB	$26,5^\circ$
$3\pi/4$	3000	1,257	2,192 dB	$26,41^\circ$
π	4000	2	6,021 dB	0°

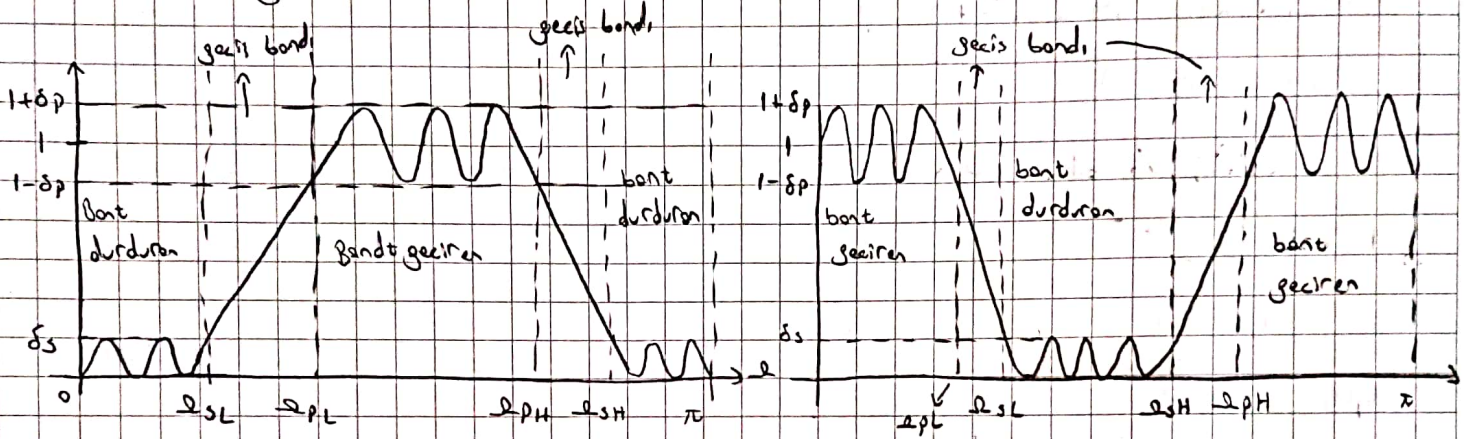


Temel Filtre Özellikleri



Alçak geçiren filtre

Yüksek geçiren filtre



ω_p : Kesim frekansı,

ω_{pH} = üst kesim frekansı

ω_s = Durdurma frekansı,

ω_{sH} = alt durdurma frekansı

ω_{sL} = Alt durdurma frekansı

ω_{pL} = Alt kesim frekansı

Frekans Tepkisinin Modülüne Dönmesi

frekz (B, A, N);

frekz (B, A, N, fs);

$B = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_M]$;

$A = [1 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]$;

N: Adım büyüklüğüne gösteren parametre (nokta sayısı)

π/N : Adım büyüklüğü

$[h, w] = \text{frekz}(B, A, N)$;

$H(e^{j\omega})$ O ile π arasındaki π/N adımlarla elde edilen ω değerleri

$H(z)$ \rightarrow $\frac{1}{2N}$ f_s aralıklarla $0 - \frac{f_s}{2}$ arasındaki frekans değerleri

$[h, f] = \text{freqz}(D, A, N, f_s);$

Örnek: $H(z) = \frac{0,5z^2 - 0,32}{z^2 + 0,5z + 0,25}$ Frekans tepkisini Matlab yardımıyla bulalım

$$D = [0,5 \quad 0 \quad -0,32]$$

$$A = [1 \quad -0,5 \quad 0,25]$$

$$N = 2000;$$

çizdirme \leftarrow $\text{freqz}(D, A, N);$ % Genlik ve faz tep

$[h, w] = \text{freqz}(D, A, N);$

$\text{aci} = \text{angle}(h);$ % radyan cinsinden aci değerleri

$\text{genlik} = \text{abs}(h);$

$\text{aci} = \text{aci} * 180 / \pi;$ % derece cinsinden aci değerleri

$\text{subplot}(2, 1, 1);$

$\text{plot}(w, 20 * \log_{10}(\text{genlik}));$ % genlik tepkisi

$\text{subplot}(2, 1, 2);$

$\text{plot}(w, \text{aci});$

Filtrelerin Gerçekleştirilmesi

Direct form - I

Direct form - II

Transposed Direct form - II

Parallel

Cascade

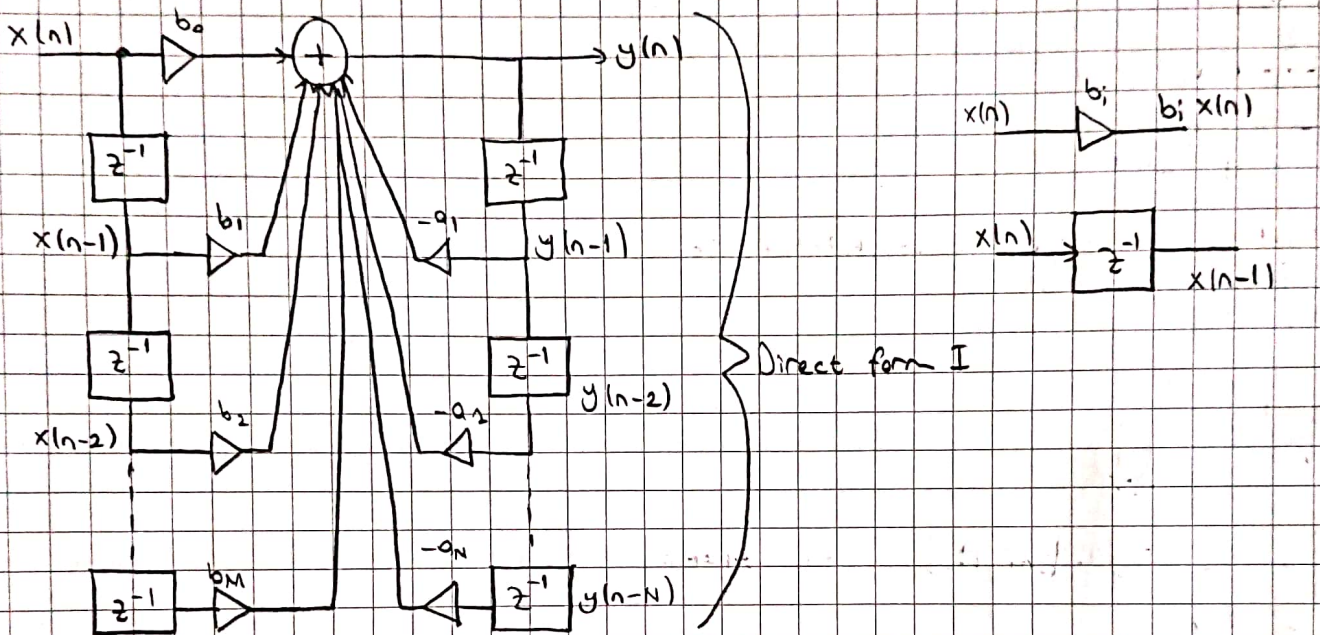
Filtrelerin gerçekleştirme yöntemleri

Direct Form I

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z) = \left(\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \right) X(z)$$

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) - a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_N y(n-N)$$



Direct form II

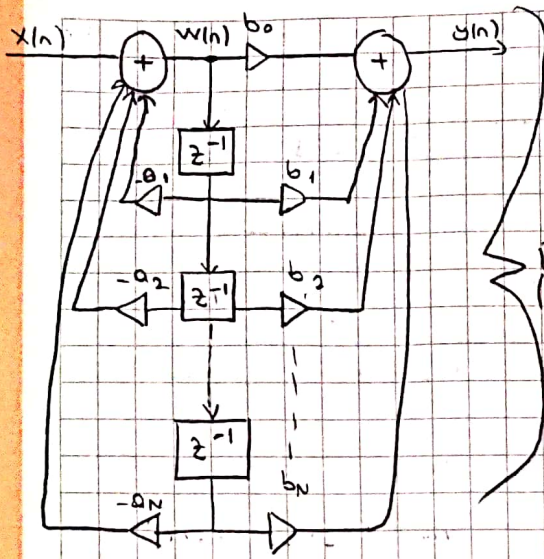
$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot X(z) = \left(\frac{X(z)}{A(z)} \right) B(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}) \frac{X(z)}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = W(z)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}) W(z)$$

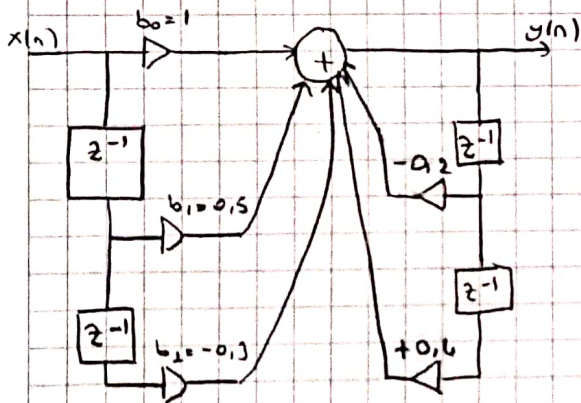
$$y(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + \dots + b_M w(n-M)$$

$$w(n) = x(n) - a_1 w(n-1) - a_2 w(n-2) - \dots - a_N w(n-N)$$



Direct form II
(Daha hızlı)

Örnek: $b_0=1$ $a_1=0,2$ } olan filtreyi direct form I ile gerçekleştiriniz.
 $b_1=0,5$ $a_2=-0,4$
 $b_2=-0,3$



$$y(n) = x(n) + 0,5x(n-1) - 0,3x(n-2) - 0,2y(n-1) + 0,4y(n-2)$$

$b_0=1;$
 $b_1=0,5;$
 $b_2=-0,3$
 $a_1=0,2$
 $a_2=-0,4$

$x = [0 \ 0]$; $y = [0 \ 0]$; % Başlangıç değerleri
 $x(n-1)$ $x(n-2)$ $y(n-1)$ $y(n-2)$

while(1) % sonsuz döngü oluşturur

dijeri

$x(n)$ giristen alınan saati önce

$x1 = \text{input}$ % giristen önce oku istenleri: gap sonra yeni bir değeri oku
 $yout = b_0 * x1 + b_1 * x(1) + b_2 * x(2) - a_1 * y(1) - a_2 * y(2);$

$x(2) = x(1);$
 $x(1) = x1;$
 $y(2) = y(1);$
 $y(1) = yout;$
end;

üçüncü programın genelleştirilmiş hali

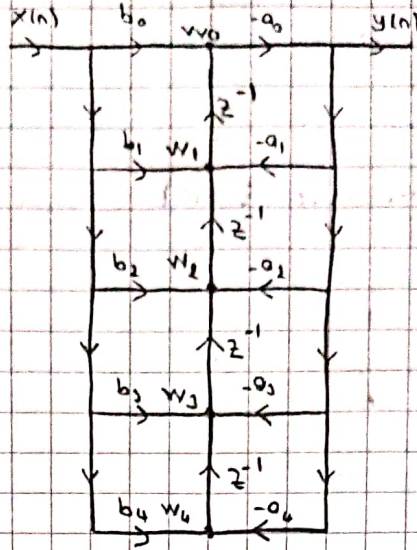
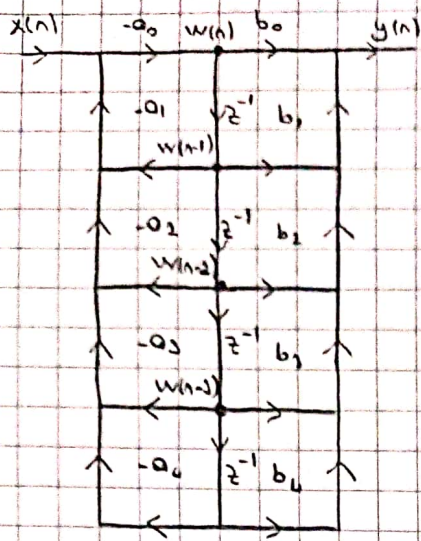
$B = [1 \ 0,5 \ -0,3];$ $b_0=1;$
 $A = [-0,2 \ 0,4];$
 $b_1 \ x(n-1)$ $b_2 \ x(n-2)$
 a_1 a_2

$x = [0 \ 0];$
 $y = [0 \ 0];$ $x_0 = 0;$
 $N = 2;$ % a katsayıları
 $M = 2;$ % b
while(1); $x_1 = \text{input};$
for $k=1:N$

$x_a = x_a + B(k) * x(k)$
end;
 $x_a = x_a + b_0 * x_1;$
for $k=1:M$
 $x_a = x_a + A(k) * y(k);$
end;
for $k=N:2$
 $x(k+1) = x(k)$
 $x(k) = x(k-1);$
end;

X

Transposed Direct Form - II



Transposed direct form - II

$$w_0(n) = w_1(n-1) + b_0 x(n)$$

$$w_1(n) = -a_1 w_0(n) + w_2(n-1) + b_1 x(n)$$

$$w_2(n) = -a_2 w_0(n) + w_3(n-1) + b_2 x(n)$$

$$w_3(n) = -a_3 w_0(n) + w_4(n-1) + b_3 x(n)$$

$$w_4(n) = -a_4 w_0(n) + b_4 x(n)$$

$$y(n) = w_0(n)$$

Direct form II'nin farklı bir gösterimi.

Transposed direct form - II

5 adet a katsayısı

5 adet b katsayısı

* Transposed direct form II, direct form II kullanılarak elde edilebilir. Bunun için direct form II'nin

blok şemasında bazı değişiklikler yapmak gerekir.

- Her çizgideki blok yeni ilk sıra olarak ters çevrilir.

- Aynı işler ağındındaki gibi yeni çizgilere atanır.

Şekildeki örneğe ilişkin program

```
w1=0; w2=0; w3=0; w4=0;
```

```
for k=1:npts % npts giristen gelen örnek sayısı
```

```
w0=w1+b0*x;
```

```
w1=-a1*w0+w2+b1*x;
```

```
w2=-a2*w0+w3+b2*x;
```

```
w3=-a3*w0+w4+b3*x;
```

```
w4=-a4*w0+b4*x;
```

```
y=w0;
```

```
end;
```

Ex: $y(n) = x(n-1) - 0,75y(n-1) - 0,125y(n-2)$

$x(n) = 0,5^n u(n)$ için $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e karşılık gelen çıkışları $x(-1) = -1, y(-2) = 2, y(-1) = 1$ için hesapla.

z dönüşümü ile çözelim

$$Y(z) = \frac{x(-1)}{-1} + \frac{z^{-1}x(z)}{1-0,5z^{-1}} - 0,75 \frac{y(-1)}{1} - 0,75 z^{-1}Y(z) - 0,125 \frac{y(-2)}{2} - 0,125 \frac{y(-1)}{1} z^{-1} - 0,125 z^{-2}Y(z)$$

$$x(n) = 0,5^n u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-0,5z^{-1}}$$

$$Y(z) = (-1) + z^{-1} \frac{1}{1-0,5z^{-1}} - 0,75 - 0,75 z^{-1}Y(z) - (0,125 \times 2) - 0,125 z^{-1} - 0,125 z^{-2}Y(z)$$

$$Y(z) = Y(z) (-0,75z^{-1} - 0,125z^{-2}) - 2 - 0,125z^{-1} + \frac{z^{-1}}{1-0,5z^{-1}}$$

$$Y(z) \underbrace{(1 + 0,75z^{-1} + 0,125z^{-2})}_M = -2 - 0,125z^{-1} + \frac{z^{-1}}{1-0,5z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{-2}{M} - \frac{0,125z}{z^2 + 0,75z + 0,125} + \frac{z^2}{(z-0,5)(z^2 + 0,75z + 0,125)}$$

$$z_1 = -\frac{1}{4} \quad z_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{0,125z}{z^2 + 0,75z + 0,125} = \frac{0,125}{(z + \frac{1}{4})(z + \frac{1}{2})} = \frac{a}{z + \frac{1}{4}} + \frac{b}{z + \frac{1}{2}}$$

$$\frac{z^2}{(z-0,5)(z^2 + 0,75z + 0,125)} = \frac{c}{z-0,5} + \frac{d}{z + \frac{1}{4}} + \frac{f}{z + \frac{1}{2}}$$

Ex: $y(n) = 0,5x(n) + 0,5x(n-1)$

a. $H(z) = ?$

b. $x(n) = 4\delta(n) \Rightarrow y(n) = ?$

c. $x(n) = 10u(n) \Rightarrow y(n) = ?$

a. $H(z) = 0,5 + 0,5z^{-1}$

b. $x(n) = 4\delta(n) \Rightarrow X(z) = 4 \quad Y(z) = X(z) \cdot H(z) \Rightarrow 4 \cdot H(z) \quad Y(z) = 2 + 2z^{-1} \quad y(n) = 2\delta(n) + 2\delta(n-1)$

c. $x(n) = 10u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{10z}{z-1} \quad Y(z) = X(z) \cdot H(z) = (0,5 + 0,5z^{-1}) \frac{10z}{z-1} = \frac{5z}{z-1} + \frac{5}{z-1}$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{5z + 5}{z(z-1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} \quad A = -5 \quad Y(z) = -5 + \frac{10z}{z-1} = -5\delta(n) + 10u(n) \quad B = 10$$

Ex: Aşağıdaki sistemlerin kutup sıfır diyagramlarını çizip kararlılıklarını inceleyelim.

$$a. H(z) = \frac{z - 0,5}{(z + 0,25)(z^2 + z + 0,8)}$$

$$b. H(z) = \frac{z^2 + 0,25z}{(z - 0,5)(z^2 + 4z + 7)}$$

$$c. H(z) = \frac{z + 0,85}{(z + 0,2)(z^2 + 1,41z + 1)}$$

$$d. H(z) = \frac{z^2 + z + 0,25}{(z - 1)(z + 1)^2(z - 0,36)}$$

Ex: Verilen transfer fonksiyonlarını kullanarak fark denklemlerini elde ediniz

a) $H(z) = \frac{z^2 - 0,25}{z^2 + 1,1z + 0,18}$

b) $H(z) = \frac{z^2 - 0,1z + 0,3}{z^3}$

a. $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - 0,25}{z^2 + 1,1z + 0,18} = \frac{1 - 0,25z^{-2}}{1 + 1,1z^{-1} + 0,18z^{-2}} \Rightarrow Y(z)(1 + 1,1z^{-1} + 0,18z^{-2}) = X(z)(1 - 0,25z^{-2})$
 $y(n) + 1,1y(n-1) + 0,18y(n-2) = x(n) - 0,25x(n-2)$

b. $H(z) = \frac{z^2 - 0,1z + 0,3}{z^3} \quad H(z) = z^{-1} - 0,1z^{-2} + 0,3z^{-3}$
 $y(n) = x(n-1) - 0,1x(n-2) + 0,3x(n-3)$

Ex: $y(n) = 0,5x(n) + 0,5x(n-2)$ (FIR filterdir) $f_s = 8000$

a. Determine frequency response

b. Calculate and plot magnitude and phase response

c. Determine the filter type

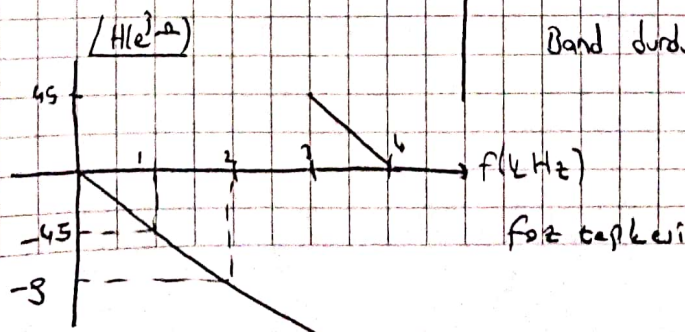
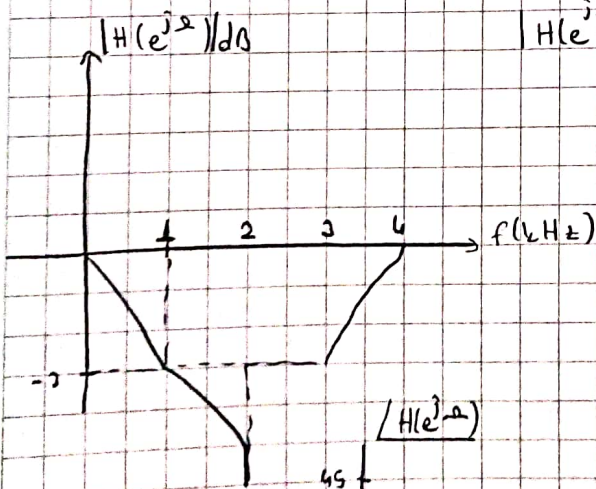
a. $Y(z) = 0,5X(z) + z^{-2}0,5X(z)$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0,5 + 0,5z^{-2}$

$H(e^{j\omega}) = 0,5 + 0,5e^{-2j\omega}$

ω	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
f	0	$f = \frac{\omega}{2\pi} f_s = 1000\text{Hz}$	2000	3000	4000
$ H(e^{j\omega}) $	1	0,707	0	0,707	1
$\angle H(e^{j\omega})$	0	-45°	-90°	45°	0
$ H(e^{j\omega}) \text{ dB}$	0	-3	$-\infty$	-3	0

$|H(e^{j\omega})| \text{ (dB)} = 20 \log(|H(e^{j\omega})|)$



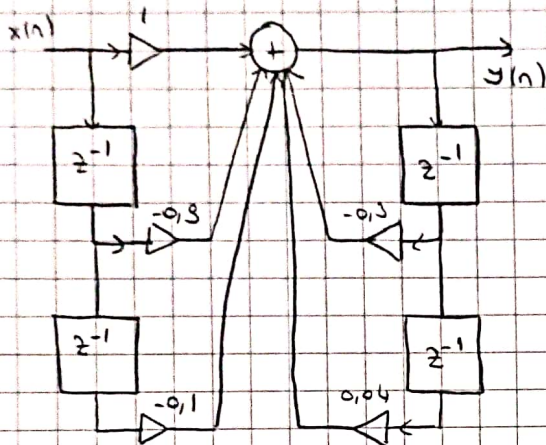
Ex: Verilen transfer fonksiyonuna göre filtrenin direct form I ve direct form II gerektirenine ilişkin diyagramı çiziniz.

$$H(z) = \frac{1 - 0,9z^{-1} - 0,1z^{-2}}{1 + 0,3z^{-1} - 0,04z^{-2}}$$

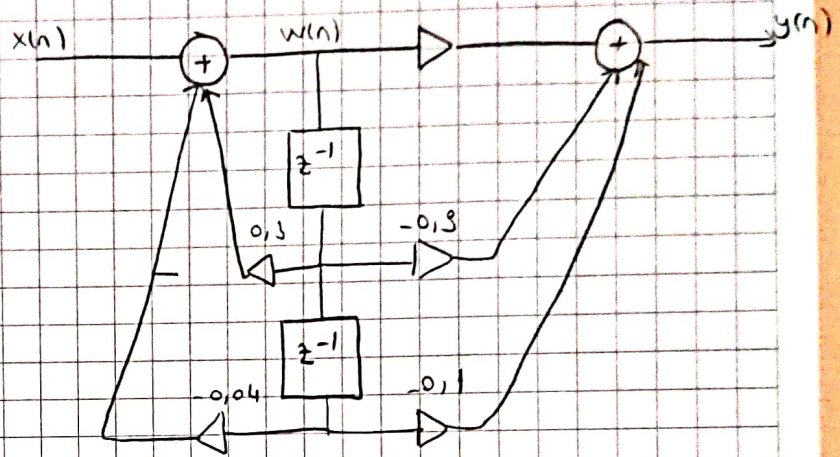
$$b_0 = 1, \quad b_1 = -0,9, \quad b_2 = -0,1$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0,3, \quad a_2 = -0,04$$

$$y(n) = x(n) + 0,9x(n-1) - 0,1x(n-2) - 0,3y(n-1) + 0,04y(n-2)$$



Direct form I



Direct form II

Direct form II'nin çıkarılması

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad Y(z) = B(z) \frac{X(z)}{A(z)}$$

$$Y(z) = (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}) W(z) \quad a_2 = -0,04$$

$$y(n) = b_0w(n) + b_1w(n-1) + \dots + b_Mw(n-M)$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots} \Rightarrow W(z) (1 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}) = X(z)$$

$$w(n) = x(n) - a_1w(n-1) - a_2w(n-2) - \dots$$