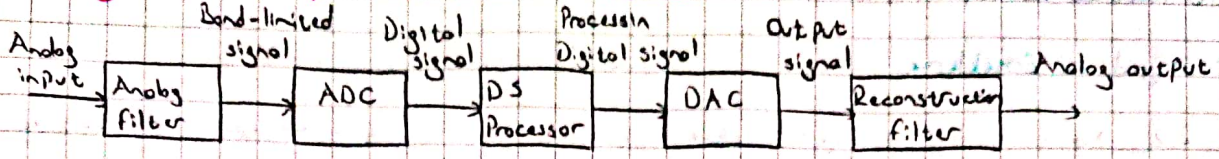


1.1. Sayısal İşaret İşlemenin Temel Kavramları



Şekil 1.1. Bir dijital sinyal işleme sistemi

DSP kavramı, bir analog filtre, Analog dijital dönüştürücü (ADC), Dijital sinyal işleme, dijital analog dönüştürücü (DAC) ve yeniden yapılandırma filtresinden oluşur.

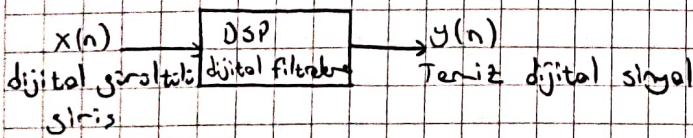
1.2. Blok Diyagramlarda Temel Dijital Sinyal İşleme Örnekleri

Öncelikle blok diyagramları kullanarak dijital gürültü filtresi ve sinyal frekans analizine bakalım.

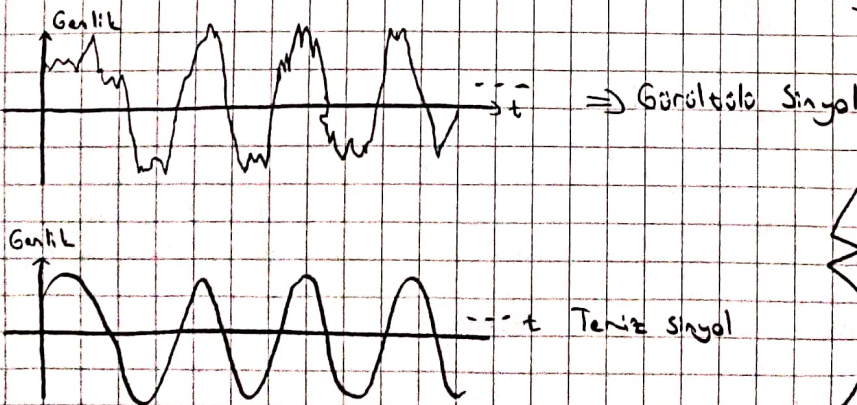
1.2.1. Dijital Filtreleme

Yararlı sinyalimiz düşük frekanslı bileşen içerdiğinden, yararlı sinyalimizin üzerindeki yüksek frekanslı bileşenler, bir alçak geçiren filtre kullanılarak yararlı sinyalden ayrıştırılabilen gürültüler olarak kabul edilir.

Şimdiye kadar sayısallaştırılmış gürültülü sinyal ve temiz dijital sinyal, şekil 1.3'de gösterilmiş olup, üst kısım sayısallaştırılmış gürültülü sinyali, alt kısımda alçak geçiren filtre uygulanarak temizlenen dijital sinyali göstermektedir.



Şekil 1.2. Basit dijital filtreleme bloğu



Şekil 1.3. (Üst) Sayısallaştırılmış gürültülü sinyal, (Alt) Dijital alçak geçiren filtre kullanılarak elde edilen temiz sinyal

2. Sinyal Örnekleme ve Ölçme

2.1. Sürekli sinyal ve örnekleme

Şekil 2.2 Zaman eksenini ve gerilim eksenini üzerindeki her noktada tanımlanan bir analog sinyali göstermektedir. Doğrusuyla analog sinyal sonsuz sayıda noktada kesilir.

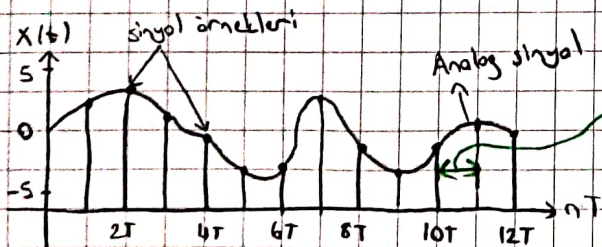
Sonsuz sayıda noktayı sayısallaştırmak mümkün değildir. Bunun için sonsuz sayıda bellek ve işlem gerekir. Örnekleme Şekil 2.2 ve Şekil 2.3'de gösterildiği gibi sabit zaman aralığındaki noktaları alarak bu sorunu çözebilir. Burada T süresi, örnekleme aralığını veya örnekleme süresini, soniye cinsinden gösterir.

$$f_s = \frac{1}{T} \text{ (Hz)} \text{ (Saniyedeki örnekleme sayısı)}$$

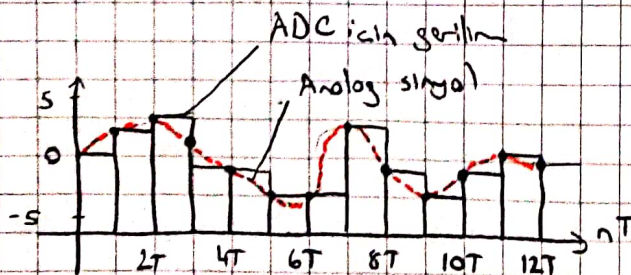
Örneğin bir örnekleme periyodu $T = 125 \mu s$ ise örnekleme frekansı

$$f_s = \frac{1}{125 \mu s} = 8000 \text{ (Hz)} \text{ saniyedeki örnekler}$$

Analog sinyal örneklendikten sonra, örneklenen sinyal sayıları işlemcide tutulur böylece örneklennis sinyalden yeniden analog sinyal elde etmek istendiğinde bu örneklenen anlarda-ki gerilim değerleri birleştirilerek yapılır. Örneklennis sinyalden ilk analog hale dön-
mek için minimum örnekleme oranının sağlanması gerekmektedir.



Şekil 2.2 Analog sinyal ve örneklennis dijital sinyal



Şekil 2.3. ADC için örnekleme ve tutulan analog voltajı

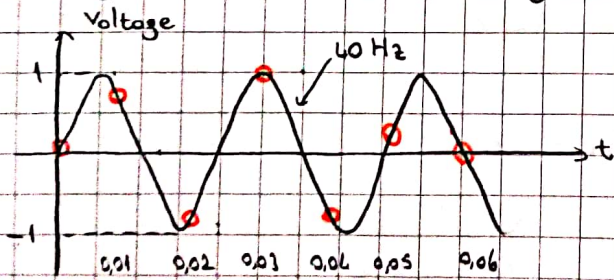
Örnekleme teoremi, bir analog sinyalin teoride, örnekleme hızı örneklenecek analog sinyalin en yüksek frekans değerinin iki katı olursa analog sinyal nükemmel şekilde geri dönüştürülebilir. f_s : Örnekleme frekansı

$$f_s \geq 2f_{max}$$

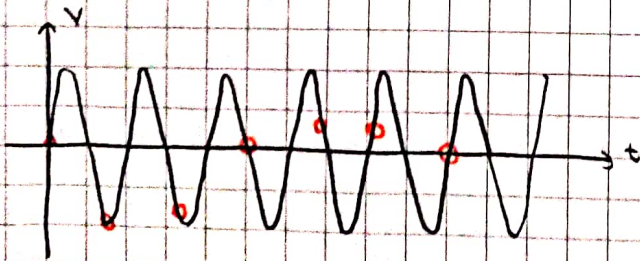
Örneğin 4 kHz'ye kadar frekanslar içeren bir konuşma sinyalini örneklenecek için, minimum örnekleme hızı soniyede en az 8 kHz olmalıdır veya 8000 örnek seçilmelidir.

Şekil 2.4'de örnekleme periyodunun $T=0,01$ sn olduğu ve örnekleme frekansının 100 Hz olduğu iki sinyal gösterilmektedir. Şekildeki ilk sinyal 40 Hz frekanslı bir sinüs sinyalinin örneklennmiş genliklerini göstermektedir. Örnekleme teoremi koşulunca, $2f_{max}=80 \text{ Hz} < f_s$ olduğundan sinyal sağlıklı bir şekilde örneklenebilmektedir. Örneklenen genlikler yeniden birleştirildiğinde ilk analog sinyale benzer bir sinyal elde edileceği için örnekleme işlemi başarılıdır.

İkinci şekilde 30 Hz frekanslı bir sinüs dalgası verilmiş ve 100 Hz'de örneklennmiştir. Örnekleme teoremi gereğince $2f_{max}=60 \text{ Hz} < f_s$ olduğundan aslında sinyalin sağlıklı bir şekilde örneklenebileceği görünür. Bu sinyaldeki örnekleme noktaları birleştirilirse ilk sinyalden çok farklı bir sinyal elde edilir ve baslangıçtaki hale dönmek mümkün değildir.



Şekil 2.4



Şekil 2.5, sürekli sinyal olan $x(t)$ 'nin f_s örnekleme hızında, örneklemeyle elde edilen $x_s(t)$ 'yi göstermektedir.

Matematiksel olarak, bu işlem sürekli sinyalin ve örnekleme darbelerinin ürünü olarak yazılabilir,

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t) \quad (2.1)$$

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t)$$

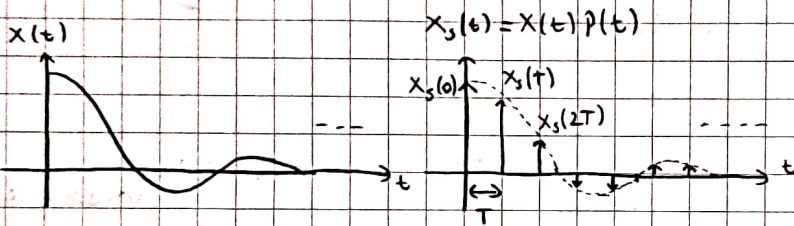
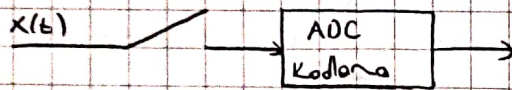
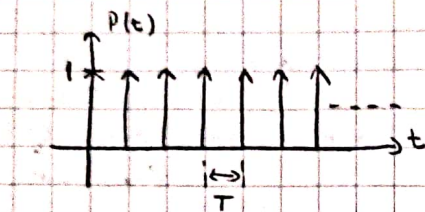
$$\mathcal{F}\{x_s(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) \cdot p(t)\}$$

$$= x(t) * p(t)$$

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{jk\omega_0 t}$$

Şekil 2.5

Basitleştirilmiş örnekleme işlemi



$p(t)$, $T = \frac{1}{f_s}$ periyodu olan "pulse train"dır. Spektral analizden, Hz cinsinden orijinal spektrum (frekans bileşenleri) $X(f)$ ve örneklenmiş sinyal spektrumu $X_s(f)$

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \quad (2.2)$$

(2.2) denklemini genişletilirse (2.3) denklemini elde edilir,

$$X_s(f) = \dots + \frac{1}{T} X(f + f_s) + \frac{1}{T} X(f) + \frac{1}{T} X(f - f_s) + \dots \quad (2.3)$$

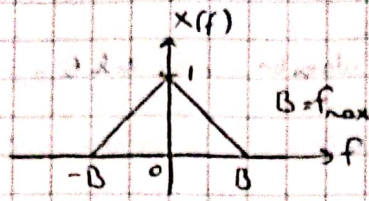
Denklemin (2.3) taslağı, üç absis eksenin sınıflandırıldığı şekil 2.6'da verilmiştir.

Şekil 2.6(a) da çizilen orijinal sinyal spektrumu $X(f)$ göz önüne alındığında, denklemin (2.3)'e göre örneklenmiş sinyal spektrumu, şekil 2.6(b)'de çizilir, şekil 2.6(c) temel bant spektrumunun ve kopyalarının, sadece birbirine bağlı olduğunu göstermektedir, ve son olarak, şekil 2.6(d)'de orijinal spektrum $\frac{1}{T} X(f)$ ve kopyaları,

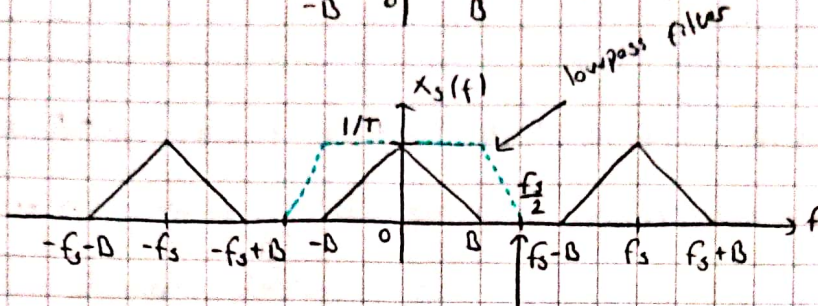
$\frac{1}{T} x(f-f_s), \frac{1}{T} x(f+f_s) \dots$ örtüsürler; yani örneklenen sinyal spektrumunda bir çok örtüşen kısım vardır.

$\Rightarrow$ Sürekli zamanlı sinyal $f_s < 2f_{max}$ ile örneklense örtüşme meydana gelir.

(A)

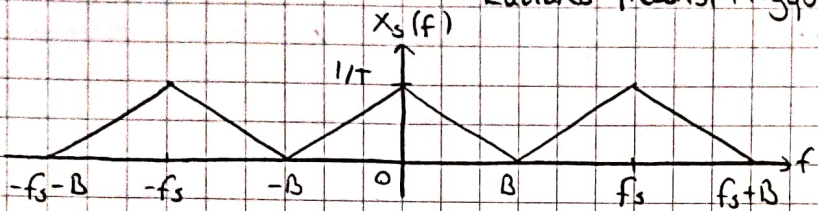


(B)



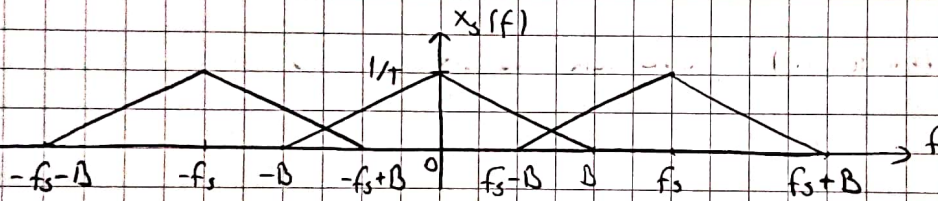
$f_s > 2f_{max}$ örtüşme yok
(No aliasing)

(C)



Katlama frekansı / Nyquist sınırı

(D)



$f_s < 2B$ Örtüşme var
(Aliasing occurs)

Şekil 2.6. Örneklenen sinyal spektrumunun çizimleri.

Şekil 2.6'dan itibaren, örneklennmiş sinyal spektrumunun, orijin merkezindeki ölçeklenmiş temel bant spektrumundan ve $n=1, 2, 3, \dots$ 'ün her biri için $\pm n f_s$ (örnekleme oranının katları) frekanslarında merkezlenmiş kopyalarından oluştuğu açıktır.

Orijinal sinyal spektrumunun yeniden elde edilmesi için bir ölçek geçiren filtreye uygulanacaksa aşağıdaki koşula dikkat edilmelidir:

$$f_s - f_{max} \geq f_{max} \quad (2.4)$$

(2.4)'ün eşdeğeri bize (2.5)'i verir.

$$f_s \geq 2f_{max} \quad (2.5)$$

Denklem (2.5)'i radyan cinsinden yazacak olursak

$$\omega_s \geq 2\omega_{max} \quad (2.6) \text{ elde edilir.}$$

Düzenli bir şekilde örneklendirilmiş bir DSP sistemi için, örneklene hızı örneklenecek olan analog sinyalin en yüksek frekans bileşeninin en az iki katı olduğu sürece, bir analog sinyal n-kernel bir şekilde geri kazanılabilir. $f_s \geq 2f_{max}$

Örneklendirilmiş sinyal bir olarak geçen filtre kullanılarak örneklendirilmiş değerleri orantılıyla geri kazanılabilir.

Örneklene frekansının yarısı $f_s/2$ genellikle Nyquist frekansı olarak adlandırılır. Örnekleme teorisi, f_s örneklene hızına sahip bir DSP sisteminin, spektral örtüşme yapmadan (örneklene) örneklene hızının yarısına kadar en yüksek frekanslı bir analog sinyali örneklemlenebileceğini gösterir. Bu nedenle, analog sinyal örneklendirilmiş verisinden n-kernel şekilde kurtarılabilir.

Ex. 2.1. Bir analog sinyalin aşağıdaki gibi verildiği varsayalım

$$x(t) = 5 \cos(2\pi \cdot 1000t) \quad t \geq 0 \text{ iken ve sinyal } 8000 \text{ Hz'de örneklenebilmektedir.}$$

a. Orijinal sinyalin spektrumunu çiz.

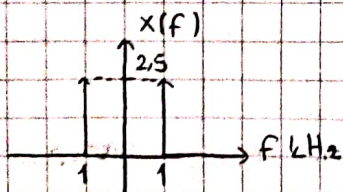
b. Örneklenen sinyalin spektrumunu 0 ile 20 kHz aralığında çiziniz.

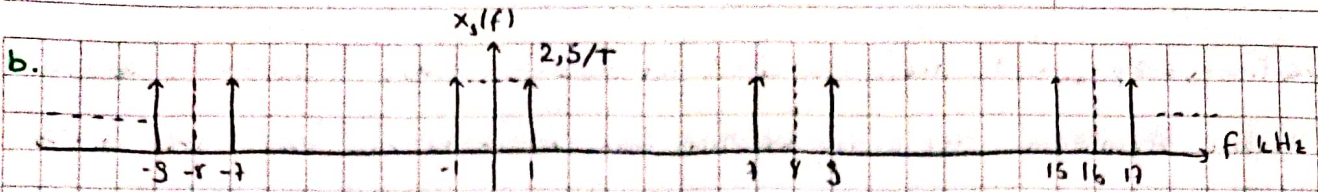
a. Analog sinyal tepe değerinin 5 ve frekansının 1000 Hz olduğu sinüzoidal bir sinyaldir. Euler açılımıyla yazarsak

$$5 \cos(2\pi \cdot 1000t) = 5 \left(\frac{e^{j2\pi \cdot 1000t} + e^{-j2\pi \cdot 1000t}}{2} \right) = 2,5 e^{j2\pi \cdot 1000t} + 2,5 e^{-j2\pi \cdot 1000t}$$

fourier serisi katsayıları $C_1 = 2,5$ ve $C_{-1} = 2,5$

Katsayıların büyüklüklerini kullanarak, iki taraflı spektrum şu şekilde çizilir,

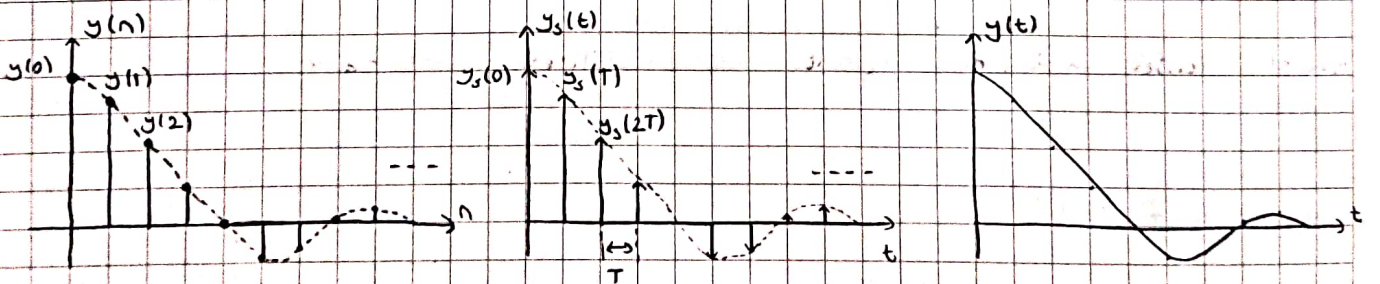
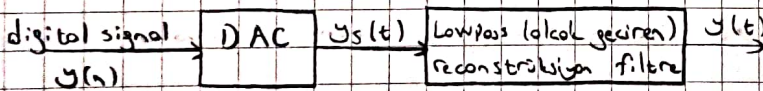




2.2. Signal Reconstruction (Örneklennmiş ayrık sinyalin eski haline dönüştürülmesi)

Bu bölümde örneklennmiş bir sinyalin analog haline geri dönüştürülmesi araştırılacaktır. Şekil 2.8'de gösterildiği gibi iki basitleştirilmiş adım söz konusudur. Öncelikle dijital olarak işlenmiş veri $y(n)$, "ideal impulse train $y_s(t)$ "'ye dönüştürülür, her darbenin dijital alı, $y(n)$ ile orantılı olarak genliğe sahip olduğu, ve iki ardışık darbe bir örnekleme süresi T ile ayrılır. İkinci olarak, analog yeniden yapılandırma filtresi geri kazanılmış analog sinyali elde etmek için ideal olarak geri kazanılmış örneklennmiş signale $y_s(t)$ uygulanır.

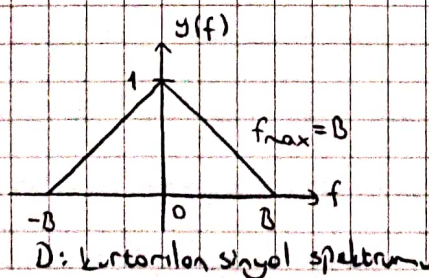
Sinyal rekonstrüksiyonunu incelemek için, DSP'siz durum için $y(n) = x(n)$ 'e izin veriniz, böylece yeniden yapılandırılmış örneklennmiş sinyal ve giriş örneklennmiş sinyalin aynı olması sağlanır. Yani $y_s(t) = x_s(t)$. Dolayısıyla, örneklenen sinyal $y_s(t)$ 'nin spektrumu, orijinal spektrum $X(f)$ ile aynı spektral içeriği içerir,



A: Dijital sinyal istendi

B: Örneklenen sinyal kurtarıldı

C: Analog sinyal kurtarıldı

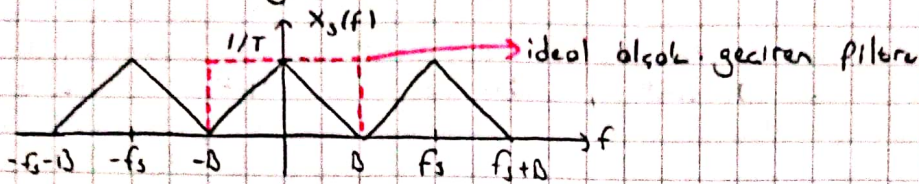


D: Kurtarılan sinyal spektrumu

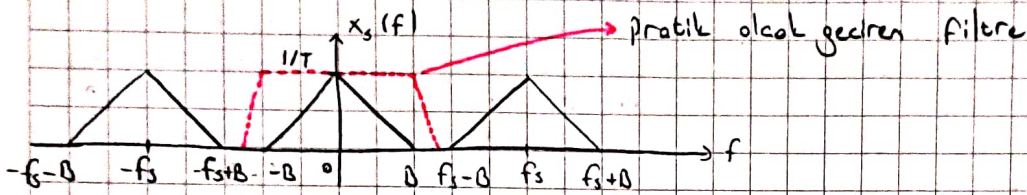
Şekil 2.8. Yeniden yapılandırma aşamasında sinyal notasyonu

Durum 1. $f_s = 2f_{max}$

Nyquist frekansının, $x(t)$ analog sinyalinin max frekansına eşit olduğu Şekil 2.9'da gösterildiği gibi, analog sinyal spektrumunu geri kazanma için ideal bir alçak geçiren rekonstrüksiyon filtresi gereklidir, bu pratik bir durumdur.



Şekil 2.9. $f_s = 2f_{max}$ olduğunda örnekleme sinyali spektrumu.



Şekil 2.10. $f_s > 2f_{max}$ olduğunda örnekleme sinyali spektrumu.

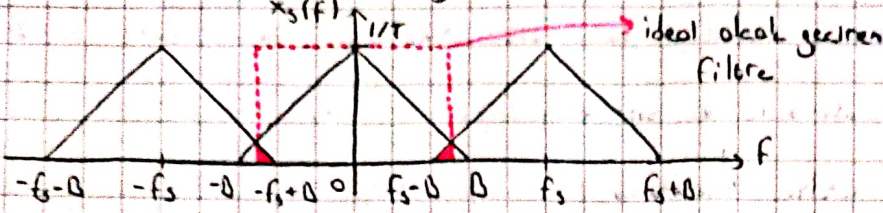
Durum 2. $f_s > 2f_{max}$

Bu durumda, Şekil 2.10'da gösterildiği gibi, temel bant spektrumunun en yüksek frekans kenarı ile birinci kopyasının alt kenarı arasında bir ayır vardır. Bu nedenle, tüm görüntüleri reddetmek ve orijinal sinyal spektrumunu elde etmek için pratik bir düşük geçişli yan bant geçirmiş (görüntü önleme) filtresi tasarlanabilir.

Durum 3. $f_s < 2f_{max}$

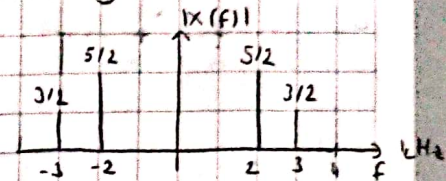
Durum 3'de Shannon örnekleme teoremi ihlal edilmektedir. Şekil 2.11'de görüldüğü gibi, orijinal temel bant spektrumu ve kopyalarının spektrumları arasında spektral bir örtüşme görülür. Bu görüntüleri kaldırmak için ideal bir alçak geçiren filtre uygulanırsa bile, temel bantta bitişik kopyadan hala bazı acılma frekans bileşenleri vardır. Zaman alanında geri kazanılan analog sinyal, örtüşme görüntü frekansı veya frekanslarından oluşabilir. Bu nedenle kurtarılan analog sinyal iyileştirilemez şekilde bozulmuştur.

Örnekleme frekansı: $f_{\text{ö}} = f_s - f$



Şekil 2.11. $f_s < 2f_{\text{max}}$ durumunda örneklennmiş sinyalin spektrumu.

Ex: 2.2. $x(t) = 5 \cos(2\pi 2000t) + 3 \cos(2\pi 3000t)$, $t > 0$ için ve sinyal 8000 Hz ile örneklennmektedir.

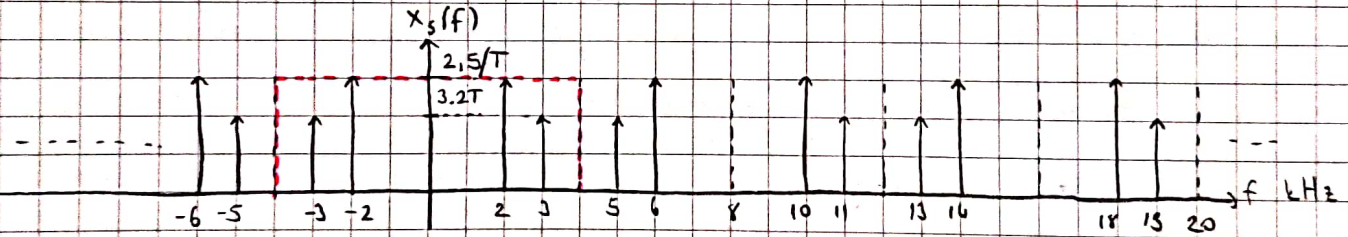


a. Örneklenen sinyalin spektrumunu 20 kHz'e kadar çiziniz.

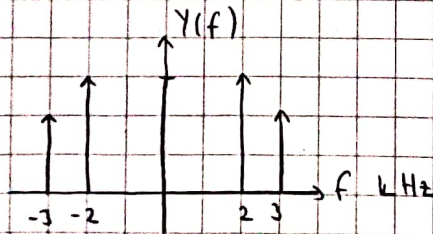
b. Orijinal sinyali kurtarmak için örneklenen sinyali filtrelemek için 4 kHz kesme frekansına sahip ideal bir düşük geçiş filtresi kullanılırsa, kurtarılan analog sinyal spektrumunu çiziniz.

a. Euler eşitliğini kullanırsak

$$x(t) = \frac{5}{2} (e^{j2\pi 2000t} + e^{-j2\pi 2000t}) + \frac{3}{2} (e^{j2\pi 3000t} + e^{-j2\pi 3000t})$$

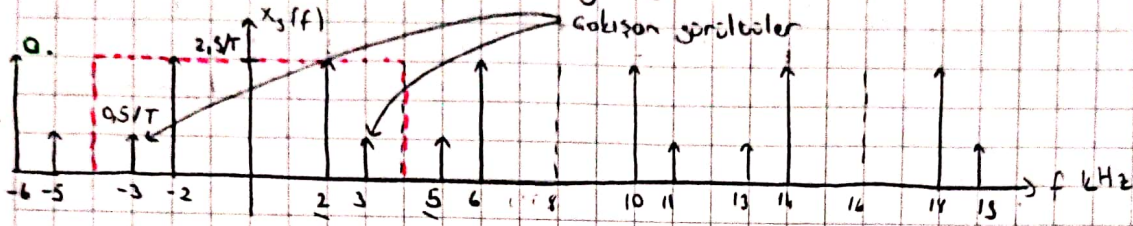


b. (A)'daki spektrundan faydalanarak, örnekleme koşulu yerine getirilir. Bu nedenle bir yeniden alıştırma olarak geçen filtre kullanılırsa, geri kazanılan spektrum aşağıdaki gibi olur.



Ex. 2.3. Verilen analog sinyal $x(t) = 5 \cos(2\pi 2000t) + \cos(2\pi 5000t)$, $t > 0$ için ve sinyal 6000 Hz'de örnekleiyor.

- a) Örneklenen sinyalin spektrumunu 20 kHz'e kadar çiz.
- b) Orijinal sinyali kurtarmak için 6 kHz kesme frekansına sahip ideal bir alıcak geçen filtreye kullanılıyorsa kurtarılan analog sinyal spektrumunu çiz. (Bu durumda $y(n) = x(n)$)



$$x(t) = \frac{5}{2} (e^{j2\pi 2000t} + e^{-j2\pi 2000t}) + \frac{1}{2} (e^{j2\pi 5000t} + e^{-j2\pi 5000t})$$

b. Analog sinyalin max frekansı Nyquist frekansından daha büyük olduğundan + yani analog sinyalin max frekansı örnekleme oranından iki kat daha büyük olduğundan, örnekleme teoremi koşulları ihlal edilir. Geri kazanılmış sinyal aşağıda gösterilmektedir. Burada çalışma görülmüşün 3 kHz'de meydana geldiği görülmektedir.

